

Factorisation

Introduction

Simplifie les fractions suivantes :

a) $\frac{12}{9} =$

b) $\frac{72}{18} =$

c) $\frac{6x}{12} =$

d) $\frac{15x^3}{5x^2} =$

e) $\frac{x^2 - 4}{x + 2} =$

Pour simplifier une fraction, on doit trouver un **facteur commun** au numérateur et au dénominateur. Pour cela, il est utile de transformer numérateur et dénominateur en un **produit de facteurs**.

Dans le cas des polynômes, cette opération s'appelle la **factorisation**.

Factoriser un polynôme, c'est **transformer une somme ou une différence en un produit**.

La factorisation est donc **l'opération inverse de la distributivité**

exemple₁ : $x^2 + 4xy + 4y^2 = (x + 2y)^2$ (on a utilisé un produit remarquable)

exemple₂ : $3xy + 6y^2 = 3y(x + 2y)$ (on a utilisé la mise en évidence)

À quoi cela sert-il ? Voici quelques exemples.

simplifier certaines expressions littérales

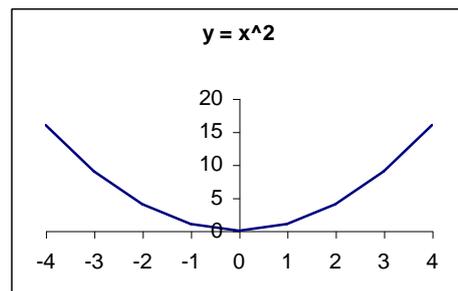
exemple₁ :
$$\frac{x^2 + 4xy + 4y^2}{3xy + 6y^2} = \frac{(x + 2y)^2}{3y(x + 2y)}$$
 (on factorise numérateur et dénominateur)

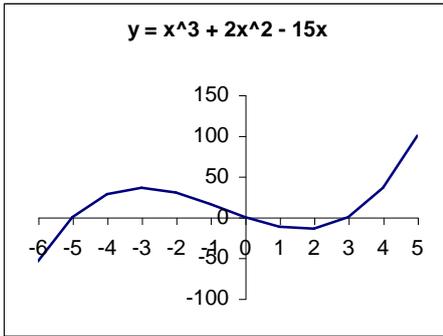
$$= \frac{x + 2y}{3y}$$
 (on simplifie par $(x + 2y)$)

exemple₂ :
$$\frac{x^2 - x}{(x-1)} = \frac{x(x-1)}{(x-1)} = \frac{x}{1} = x$$
 on a factorisé à l'aide de.....

faire de l'analyse mathématique (branche très importante des mathématiques qui consiste, en très résumé, à étudier des graphiques de fonctions ; cette discipline est à la base des statistiques, et de nombreuses disciplines en sciences et en économie - pour cela, il est souvent utile de factoriser en facteurs du 1^{er} ou 2^e degré).

exemple : tu reconnais le graphique de $y = x^2$





On peut, de la même manière, tracer le graphique de $y = x^3 + 2x^2 - 15x$

Pour étudier cette courbe, il est beaucoup plus pratique d'écrire la fonction sous forme factorisée :

$$y = x^3 + 2x^2 - 15x$$

$$y = x(x^2 + 2x - 15) \quad \text{factorisation à l'aide de ...}$$

$$y = x(x - 3)(x + 5) \quad \text{factorisation à l'aide de ...}$$

Cela permet, notamment, de trouver directement les coordonnées

des intersections avec l'axe des x

Comment factoriser ?

Pour factoriser un polynôme, on peut utiliser plusieurs méthodes :

- a) la mise en évidence
 - b) les produits remarquables
 - c) la méthode des groupements
 - d) la somme et le produit
 - e) la division d'un polynôme par un polynôme - en particulier la division par $(x \pm a)$
- il existe encore d'autres méthodes, qui dépassent le cadre de ce chapitre.

A. La mise en évidence

Exemples :

1) $6ab + 3a =$

2) $5x^4 + 2x^2 - 3x^5 =$

3) $x^2(a + 1) + 3(a + 1) =$

4) $3(a - 2) - b(2 - a) =$ car $-(2 - a) =$ =

Attention, tu dois mettre tous les facteurs communs en évidence !

Exercices : 1. et 2. p. 35 et 36

B. utilisation des produits remarquables

si le polynôme est un binôme :

$$a^2 - b^2 =$$

!!Attention : $a^2 + b^2$ est impossible à factoriser !!

exemples :

1) $a^2 - 4 =$

2) $(x - 2)^2 - (a - 1)^2 =$

3) $50 - 2x^2$: d'abord

=

=

si le polynôme est un trinôme :

$$a^2 + 2ab + b^2 =$$

$$a^2 - 2ab + b^2 =$$

exemples :

1) $x^2 + 6x + 9 =$

recherches :

- somme de deux carrés dans le trinôme ?

$$x^2 = (x)^2 \text{ et } 9 = (3)^2 \rightarrow \text{OK}$$

- le double produit existe-t-il ?

$$2 \cdot x \cdot 3 = 6x \rightarrow \text{OK}$$

2) $x^2 + 4 - 4x =$

- somme de deux carrés ?

- double produit (et son signe ?)

3) $x^2 - 3x + 1 =$

- somme de deux carrés ?

- double produit (et son signe ?)

4) $4x^2 + 12x - 9 =$

- somme de deux carrés ?

- double produit (et son signe ?)

5) $2x^2 + 20x + 50 =$

- d'abord

- somme de deux carrés ?

- double produit (et son signe ?)

Exercices : 3. et 4. p 36

C. Méthode des groupements

en prenant les termes 2 par 2

exemples :

$$\begin{array}{lcl}
 1) \underline{ax} + \underline{bx} + \underline{ay} + \underline{by} & \text{ou} & \underline{ax} + \underline{bx} + \underline{ay} + \underline{by} \\
 = x(a + b) + y(a + b) & | & = a(x + y) + b(x + y) \\
 = (a + b)(x + y) & & = (x + y)(a + b)
 \end{array}$$

→ On fait deux mises en évidence

2) $\underline{a^2} - \underline{b^2} - \underline{ac} - \underline{bc}$ → on a une différence de deux carrés et une mise en évidence

$$\begin{aligned}
 &= (a + b)(a - b) - c(a + b) \\
 &= (a + b)(a - b - c)
 \end{aligned}$$

en prenant les termes par 3 et 1

exemple : $x^2 - 4x + 4 - y^2$

on peut essayer de grouper par deux termes :

$$\begin{array}{lcl}
 1) \underline{x^2} - \underline{4x} + 4 - y^2 & & \\
 = x(x - 4) + \dots & \rightarrow & \text{'ça' ne sert à rien}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
 2) \underline{x^2} - 4x + \underline{4} - y^2 & \rightarrow & \text{'ça' ne va pas}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
 3) \underline{x^2} - 4x + 4 - \underline{y^2} & & \\
 = (x + y)(x - y) - 4(x - 1) & \rightarrow & \text{'ça' ne sert à rien}
 \end{array}$$

4) on peut essayer de grouper trois termes :

$$\begin{array}{lcl}
 \underline{x^2} - \underline{4x} + \underline{4} - y^2 & & (\text{produit remarquable : } a^2 - 2ab + b^2) \\
 = (x - 2)^2 - y^2 & & (\text{produit remarquable : } a^2 - b^2) \\
 = (x - 2 + y)(x - 2 - y) & &
 \end{array}$$

Exercices 5. et 6. p. 37

D. La somme et le produit

Exemples :

1) on veut factoriser $x^2 + 8x + 12$ sous la forme $(x + a)(x + b)$

\Leftrightarrow en distribuant $(x + a)(x + b)$, on doit retrouver $x^2 + 12x + 8$

$$(x + a)(x + b) \quad \rightarrow \quad = x^2 + ax + bx + ab \quad \rightarrow \quad = x^2 + \underline{(a + b)}x + \underline{ab}$$

$$(x + \dots)(x + \dots) \quad \leftarrow \quad a = \dots \quad \text{et} \quad b = \dots \quad \leftarrow \quad = x^2 + \underline{8}x + \underline{12}$$

$x^2 + 8x + 12$	recherche : $a.b = 12$	
		produits possibles : 1.12 2.6 3.4
		-1.(-12) -2.(-6) -3.(-4)
$= (x + 2)(x + 6)$	$a + b = 8 \rightarrow a=2 \text{ et } b=6$	

2) $x^2 - 13x + 12$	$a.b = 12 \rightarrow 1.12$	
		2.6 3.4
		-1.(-12) -2.(-6) -3.(-4)
$= (x \dots)(x \dots)$	$a + b = -13 \rightarrow$	

3) $2x^2 + 12x - 32$	$a.b =$	on commence par...
$=$	$a.b =$	
$= \dots(x \dots)(x \dots)$	$a + b =$	

Exercice 7. p. 37

E. Division par $(x \pm a)$

cette méthode peut être utilisée pour des polynômes de degré supérieur à 2

exemple : factoriser $4x^4 - 8x^3 - 11x^2 + 33x - 18$

à l'aide de la loi du reste, on trouve que le polynôme est divisible par $(x - 1)$. Avec Horner, on trouve :

$$= (x - 1)(\underline{4x^3 - 4x^2 - 15x + 18}) \quad \rightarrow \text{le polynôme souligné est divisible par } (x + 2), \text{ cela donne :}$$

$$= (x - 1)(x + 2)(\underline{4x^2 - 12x + 9}) \quad \rightarrow \text{on a encore un produit remarquable } (a - b)^2, \text{ on a donc :}$$

$$= (x - 1)(x + 2)(2x - 3)^2$$

Synthèse

Binômes

- 1) mise en évidence
- 2) produit remarquable $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Trinômes

- 1) mise en évidence
- 2) produits remarquables $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
 $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 = (b - a)^2$
- 3) somme et produit

Quadrinômes (et +)

- 1) mise en évidence
- 2) groupement 2 par 2
ou 3 et 1
- 3) division par $(x - a)$

Remarques :

- $a^2 + b^2$: pas moyen de factoriser
- il faut toujours factoriser au maximum !
- parfois, aucune de ces méthodes ne permet de trouver de factorisation, cela ne veut pas dire que c'est impossible

exercice 9 p. 38

Exercices

1. factorise à l'aide de la mise en évidence (théorie : p. 31)

- | | | |
|---------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| 1) $15a^7b^2 - 10a^5b^3$ | 6) $(x + 2)(x - 3) - (x - 3)(x + 1)$ | 11) $5x(x + 1)^2 - 10x^2(x + 1)$ |
| 2) $12x^2y^2 - 18xy^3 + 24x^3y$ | 7) $3(x - 2)x - (x + 2)^2 + (x + 2)$ | 12) $6x^2(u - 1) - 4x(1 - u)$ |
| 3) $(x + 1)^2 - 3(x + 1)$ | 8) $35x^3y^2 - 49x^2y^3$ | 13) $x(2a - b) + (b - 2a)$ |
| 4) $2(n + 1)n + 3(n + 1)$ | 9) $3x(x + y)^3 - 4x^2(x + y)^2$ | 14) $5x^{m+2}y^n + 10x^{m+1}y^{n+1}$ |
| 5) $a(x - y) - (y - x)^2$ | 10) $y(b - a) + x(a - b)$ | |

correction : bonne réponse = 1 ; réponse fausse ou incomplète = 0 ; si le total ≥ 11 , passer aux exercices supplémentaires
si le total ≤ 10 , faire l'exercice 2 puis les exercices supplémentaires

2. Même exercice

- | | | |
|--------------------------|---------------------------------------------|--------------------------------------------|
| 1) $ab - b^2$ | 9) $3(x + y) - 2(x - y)$ | 17) $39a^5b^5c^3 - 65a^5b^3cd$ |
| 2) $xy + y$ | 10) $12a^2b^2 - 18ab^3 + 24a^3b$ | 18) $-51a^4b^5c + 17a^3b^2c - 32a^3b^5c^4$ |
| 3) $a^2b - ab^2$ | 11) $12x^2y^3 - 30x^3y^2 + 18xy^4$ | 19) $a(x - y) + b(x - y)$ |
| 4) $xy - 2y$ | 12) $3x^2 - 9xy^2 + 6x$ | 20) $2a(b - c) - 4c(b - c)$ |
| 5) $x^3y^2 - x^2y^3$ | 13) $3xyz^3 - 21x^2y^2z^2 - 6x^3y^3z$ | 21) $9a^2b(x + y) + 3ab^2(x + y)$ |
| 6) $6x^2y + 4xy^2$ | 14) $5a(a + 2)^2 - 3a^2(a + 2)$ | 22) $a(m - n) - b(n - m)$ |
| 7) $15x^7b^2 - 10x^5b^3$ | 15) $5(x + y - z) - 10x(x + y - z)$ | 23) $5a^2(b - 2) + 15a(2 - b)$ |
| 8) $y(b - a) + b(b - a)$ | 16) $45x^3y^4z^5 + 60x^5y^2z - 90x^4y^3z^2$ | |

3. Factorise à l'aide des produits remarquables (théorie : p. 31 et 32)

- | | | |
|---------------------------------------|-------------------------------------------------------|--------------------------------------|
| 1) $1/9 - x^2$ | 10) $\frac{a^2}{9} + \frac{2ab}{15} + \frac{b^2}{25}$ | 19) $z^2 - 9$ |
| 2) $x^2 - 144$ | 11) $16x^2 - 4$ | 20) $25a^2 - 16$ |
| 3) $a^2 - 4a - 4$ | 12) $a^4 - 81$ | 21) $16a^2 - 25y^2$ |
| 4) $x^2 - 8x + 16$ | 13) $1 + 2x^2 + x^4$ | 22) $x^2y^2z^2 - p^2$ |
| 5) $25x^2 + 30x + 9$ | 14) $x^2 - 4xy + 4y^2$ | 23) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25}$ |
| 6) $x^2 - \frac{2x}{6} + \frac{1}{9}$ | 15) $x^6 - 6x^3 + 9$ | 24) $a^3 - \frac{4a}{9}$ |
| 7) $49 - 14a + a^2$ | 16) $x^4 - 18x^2 + 81$ | 25) $(a - 1)^2 - 1$ |
| 8) $9a^2 - 12ab + 4b^2$ | 17) $4x^2 - 28x + 49$ | |
| 9) $x^2 + 4xy + 4y^2$ | 18) $xy^2 - y^2z$ | |

Correction : bonne réponse = 1 ; réponse fautive ou incomplète = 0 ; si le total ≥ 18 , passer aux exercices supplémentaires

si le total ≤ 17 , faire l'exercice 4 puis les exercices supplémentaires

4. Même exercice

- | | | |
|--------------------------------------------------|----------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|
| 26) $a^4 - 2a^2 + 1$ | 36) $(2x + 5)^2 - (3x - 2)^2$ | 46) $\frac{1}{9} - 7x^2$ |
| 27) $81a^4 - 169$ | 37) $x^4 + 1 - 2x^2$ | 47) $4x^2 - (3x + 1)^2$ |
| 28) $(5x - \frac{3}{2})^2 - \frac{81}{4}$ | 38) $\frac{xy}{3} + \frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{4}$ | 48) $x^5 - 8x^3 + 16x$ |
| 29) $25x^5y - 49xy^3$ | 39) $49x^2 - (x - y)^2$ | 49) $16a^2 + 9b^2 - 24ab^8$ |
| 30) $x^2 + x + \frac{1}{4}$ | 40) $-x^2 + 12x - 36$ | 50) $\frac{1}{4}x^6 - \frac{2}{3}x^5 + \frac{4}{9}x^4$ |
| 31) $2a - 8a^3 + 8a^5$ | 41) $x^2 + 5x + 9$ | 51) $\frac{1}{9}a^6b^4 - \frac{2}{9}a^5b^2 + \frac{1}{9}a^4$ |
| 32) $64x^5 + 16x^4 + x^3$ | 42) $81x^2 - (x - 4)^2$ | 52) $25a^2 + 10a + 1$ |
| 33) $\frac{a^2}{4} + \frac{1}{49} - \frac{a}{7}$ | 43) $(u + t)^2 - (u - t)^2$ | 53) $x^4 + x^2y + \frac{y^2}{4}$ |
| 34) $(a - b)^2 - 121$ | 44) $3x^5 - 48xy^8$ | 54) $x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}$ |
| 35) $a^4 - b^4$ | 45) $81x^4 - \frac{1}{16}$ | |

55) $100a^2 + 9b^6 - 30ab^3$

58) $(2a + 1)^2 - (3 - a)^2$

60) $25a^2 - (b - 2a)^2$

56) $25x^4 + 16x^2y^4 - 40x^3y^2$

59) $9 + \frac{a^2b^2}{4} - 3ab$

57) $4a^5 + 12a^3b^4 + 9ab$

5. Factorise à l'aide des groupements (théorie = p. 33)

1) $ax - by - ay + bx$

5) $1 - x^2 - y^2 + 2xy$

9) $a^2x - b^2x + a^2y - b^2y$

2) $a^3 + 2a - a^2 - 2$

6) $ax - x - a + 1$

10) $x^2 + 9y^2 - 1 - 6xy$

3) $x^2 - y^2 + x^2y - xy^2$

7) $x^2 + 4xy - 1 + 4y^2$

11) $ax - 4x + 4y - ay$

4) $x^3 + x - x^2 - 1$

8) $x^3 - 2x^2 - x + 2$

12) $x^2 - 4x - y^2 + 4$

correction : bonne réponse = 1 ; réponse fausse ou incomplète = 0 ; si le total ≥ 9 , passer aux exercices supplémentaires
si le total ≤ 8 , faire l'exercice 6 puis les exercices supplémentaires

6. même exercice

13) $x + y + ax + ay$

19) $a^2 - 2ab + b^2 - 1$

25) $4x^2 + 2x - 9y^2 - 3y$

14) $ab + a + b + 1$

20) $a^2 - y^2 - 2xy - x^2$

26) $c^2 + d - d^2 - c$

15) $x^4 - 2x^3 + 4x - 8$

21) $a^2 - b^2 + 2bc - c^2$

27) $b^2y - b^2 + a^2y - a^2$

16) $20a^3 + 5a^2 - 4a - 1$

22) $x^2 - 2x - y^2 + 1$

28) $5a^3 + a^2 - 20a - 4$

17) $12ab - 8a + 3b - 2$

23) $x^2 - 4y^2 + 4y - 1$

29) $a^4 - 2a^3 + a - 2$

18) $a^3 - b^4 + a^2b - ab^3$

24) $cy + y + c + 1$

7. Factorise avec la somme et le produit (théorie : p. 34)

1) $x^2 + 3x + 2$

5) $x^2 + 4x - 21$

9) $3x^2 + 3x - 6$

2) $x^2 + 8x + 15$

6) $x^2 - 8x + 12$

10) $3x^2 - 3x - 6$

3) $x^2 + x - 6$

7) $x^2 + 13x - 14$

4) $x^2 + 5x - 6$

8) $2x^2 - 14x + 24$

8. Exercices récapitulatifs : factorise (avec la méthode de ton choix – théorie p. 35)

1) $9x^2 + 2x + \frac{1}{9}$

11) $u^3 - 6u^2 - u + 6$

23) $mn^4op^4 - mn^2op^2$

2) $2x^6 + 2 - 4x^3$

12) $-u^2 + 2u - 1$

24) $2a^2 - 12a + 18$

3) $x^4 - 2x^3 - x + 2$

13) $8a^3 - 8a^2 + 2a$

25) $x^6 - \frac{1}{16}$

4) $3(x - y) - x(y - x)$

14) $a^3 - 3a^2 - a + 3$

26) $a^4 - 2a^2 + 1$

5) $y^5 - \frac{2y^3}{3} + \frac{y}{9}$

15) $x^2 - 12x - y^2 + 36$

27) $5x^3 - 15xy^2$

6) $81x^4 - 144$

16) $xy^2 - xz^2$

28) $a^4 - 6a^2 + 9$

7) $(2x + 1)^2 - (x + 1)^2$

17) $x^4y^2 - x^2y^4$

29) $49x^3 - x$

8) $5t^4 - 10t^2 + 5$

18) $x^2y - 6xy + 9y$

30) $\frac{x^2}{4} + \frac{1}{49} - \frac{x}{7}$

9) $121a^2 - (2a + 3)^2$

19) $3x^3y - 3xy^3$

31) $9x^2y^2 - 16$

10) $x^2 + 4y^2 - 1 - 4xy$

20) $0,04y^2 - 0,09x^2$

32) $4x^2 - 2x + 1$

21) $x^8 - y^8$

22) $x^2 - x + 4^{-1}$

- | | | |
|-----------------------------|---------------------------------|-------------------------------------------------------|
| 33) $4a^2b^3 - b$ | 37) $3x^3y^2 - 5x^5$ | 41) $(4x^2 + 12x)^2 + 9(4x^2 + 12x)$ |
| 34) $75a^2 + 30a + 3$ | 38) $9(x^2 - 3) - y^4(x^2 - 3)$ | |
| 35) $(x + \sqrt{3})^2 - 16$ | 39) $3x(y^2 - 2y) + 3x$ | 42) $3x^4(x^2 - \frac{4}{3}) - 75(x^2 - \frac{4}{3})$ |
| 36) $4x^2(x + 3) - (3 + x)$ | 40) $x^4 - 2x^2 + 1$ | |

9. Exercices supplémentaires (plus difficiles)

- | | |
|-------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1) $2a(x + y) - 3b(-x - y)$ | <u>avec la division par $(x \pm a)$ ou somme et produit (théorie p. 34) :</u> |
| 2) $x(2a - b) + y(b - 2a)$ | 21) $2x^3 + 5x^2 - 4x - 3$ |
| 3) $a(x - y) - (y - x)$ | 22) $2x^3 + 3x^2 - 23x - 12$ |
| 4) $(4a - 2b)(2x - 3y) + (3y - 2x)(b - 2a)$ | 23) $x^4 + 5x^3 - 15x^2 - 45x + 54$ |
| 5) $a^2(x - 1)(a + b) + a^3(1 - x)$ | 24) $24x - 4 + 5x^4 - 6x^3 - 19x^2$ |
| 6) $(x - 2y)(a - b) - (b - a)(2x + y)$ | 25) $x^2 - 8x + 12$ |
| 7) $5x^2 - 5$ | 26) $x^2 - 14x + 13$ |
| 8) $a^4x^4 - a^4$ | 27) $x^2 - 22x + 85$ |
| 9) $a^4b^2x^5 - a^2x$ | 28) $x^2 - 4x - 5$ |
| 10) $9x^5y^7 - xy$ | 29) $x^2 + 10x + 16$ |
| 11) $12(x + 2)^3 - 3(x + 2)$ | 30) $x^2 - 115x + 1500$ |
| 12) $(a - b) - (a - b)x^4$ | 31) $x^2 - 4x - 32$ |
| 13) $-3x^9 + 3x^5$ | 32) $x^2 + 5x - 14$ |
| 14) $2x^3 - 7x$ | 33) $x^2 + 20x + 19$ |
| 15) $16a^4b^2 - 24a^2b^3 + 9b^4$ | 34) $x^2 - 4x - 12$ |
| 16) $x^2(a^2 - 4) - (a^2 - 4)$ | 35) $x^3 + 9x^2 + 11x - 21$ |
| 17) $(a + 1)^4 - (a + 1)^2$ | 36) $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ |
| 18) $125x^3(x - y)^2 - 45x(3x + 2y)^2$ | 37) $x^4 + 2x^3 - 16x^2 - 2x + 15$ |
| 19) $(a^2 + b^2 - c^2)^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2$ | 38) $x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6$ |
| 20) $\frac{(a - 1)^2}{3} - \frac{a^2}{12}$ | 39) $x^5 + 3x^4 - 16x - 48$ |

10. Autres exercices

- 1) $\frac{2^{12}}{12^2} =$ a) $\frac{2^8}{3^2}$ b) $\frac{2^{10}}{2}$ c) $\frac{2^6}{6}$ d) $\frac{1}{6}$ e) 1
- 2) Si on écrit $3^5 \cdot 27^2 \cdot 3^2 \cdot 243$ sous la forme d'une puissance de 3, l'exposant sera égal à :
a) 10 b) 18 c) 21 d) 30 e) 450
- 3) $6^6 + 6^6 + 6^6 + 6^6 + 6^6 + 6^6 =$ a) 6^0 b) 6^7 c) 36^6 d) 6^6 e) 36^{36}
- 4) $\frac{2^{13} + 2^{14} + 2^{15}}{14} =$ a) 2^{28} b) 2^{14} c) 2^{12} d) 2^{10} e) 2^6