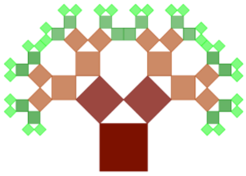
Correctif – Pythagore et les racines carrées



1. De nouveaux nombres : les racines carrées

1.1 Découverte

Tu dois construire un carré dont l'aire est 9 cm². Quelle est la longueur du côté de ce carré ?

C = 3 cm

Tu dois construire un carré dont l'aire est 8 cm². Quelle est la longueur du côté de ce carré ?

C = $\sqrt{8}$

1.2 Définition

A CONNAITRE

La racine carrée d'un nombre a ($\sqrt{a}$) est le nombre b, tel que b.b = b² = a

$\sqrt{a}$ = b avec b.b = b² = a avec a positif

1.3 Remarques

- $\sqrt{a}$ se lit racine carrée de a
- $-\sqrt{a}$ se lit moins racine carrée de a
- Dans l'expression $\sqrt{a}$, a est le radicant et $\sqrt{}$ est le radical
- Un nombre strictement négatif n'a pas de racine carrée !!

  Ex : $\sqrt{-81}$ n'existe pas car impossible de trouver un nombre élevé au carré donnant un nombre négatif !
- Le radical doit couvrir tout le radicant
  - ⇨ Écriture incorrecte : $\sqrt{81}00$
  - ⇨ Écriture correcte : $\sqrt{81}$

- Il est utile de connaitre les 20 premiers carrés parfaits

……1… = 1^2	…36…… = 6^2	…121…… = 11^2	…256…… = 16^2
……4… = 2^2	…49…… = 7^2	…144…… = 12^2	…289…… = 17^2
……9… = 3^2	…64…… = 8^2	…169…… = 13^2	…324…… = 18^2
…16… = 4^2	…81…… = 9^2	…196…… = 14^2	…361…… = 19^2
…25… = 5^2	…100… = 10^2	…225…… = 15^2	…400…… = 20^2

1.4 Propriétés

Calcule.

a) $\sqrt{4.9}$ = …$\sqrt{36}$…=……6…………………… et $\sqrt{4}.\sqrt{9}$ = …2. 3…=…6……………………………………

Que peux-tu en déduire ?

La racine carrée du produit de deux nombres positifs est égale au produit des racines carrées de ces deux nombres.

1.5 Exercices

1) Décompose chaque nombre ci-dessous en un produit de deux nombres, en veillant à ce que l'un des deux soit un carré parfait le plus grand possible.

12 = 4. 3	120 = 4. 30	80 = 16. 5
8 = 4. 2	75 = 25. 3	98 = 49. 2
24 = 4. 6	18 = 9. 2	72 = 36. 2
50 = 25. 2	60 = 4. 15	500 = 100. 5

2) Simplifie les racines carrées suivantes.

$\sqrt{32}$ = ...$\sqrt{16.2}$ = 4$\sqrt{2}$

$\sqrt{27}$ = ...$\sqrt{9.\ 3}$ = 3$\sqrt{3}$

$\sqrt{48}$ = ...$\sqrt{16.3}$ = 4$\sqrt{3}$

$\sqrt{125}$ = ...$\sqrt{25.5}$ = 5$\sqrt{5}$

$\sqrt{90}$ = ...$\sqrt{9.10}$ = 3$\sqrt{10}$

$\sqrt{200}$ = ...$\sqrt{100.2}$ = 10$\sqrt{2}$

$\sqrt{300}$ = ...$\sqrt{100.3}$ = 10$\sqrt{3}$

$\sqrt{250}$ = ...$\sqrt{25.10}$ = 5$\sqrt{10}$

$\sqrt{1000}$ = ...$\sqrt{100.10}$ = 10$\sqrt{10}$

$\sqrt{20}$ = ...$\sqrt{4.5}$ = 2$\sqrt{5}$

$\sqrt{108}$ = ...$\sqrt{36.3}$ = 6$\sqrt{3}$

$\sqrt{45}$ = ...$\sqrt{9.5}$ = 3$\sqrt{5}$

1.6 Exercices

1) Calcule sans utiliser ta calculatrice

$\sqrt{16}$ = ...4................. $\sqrt{10\,000}$ = ...100................. $\sqrt{0}$ = ...0...................

$\sqrt{1}$ = ...1................... $\sqrt{121}$ = ...11...................... $\sqrt{0{,}25}$ = ...0,5........

2) De quels nombres, les nombres proposés sont-ils les carrés ? Justifie

a) 169 de 13 b) 225 de 25 c) 9^2 de 9

d) 400 de 40 e) 289 de 17

3) Détermine les radicants des racines carrées.

$\sqrt{9} = 3$ $\sqrt{49} = 7$

$\sqrt{121} = 11$ $\sqrt{100} = 10$

$\sqrt{256} = 16$ $\sqrt{6,25} = 2,5$

$\sqrt{0,36} = 0,6$ $\sqrt{0,0001} = 0,01$

$\sqrt{12}$ = …$\sqrt{4.3} = \sqrt{4}.\sqrt{3}$…= $2\sqrt{3}$… $\sqrt{3^2}$ = …3…………………

$\sqrt{160}$ = …$\sqrt{4.10}$…=…$\sqrt{4}.\sqrt{10} = 2\sqrt{10}$…… $\sqrt{72}$ = …$\sqrt{36.2} = \sqrt{36}.\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$…

$7\sqrt{125} = 7\sqrt{25.5} = 7.5\sqrt{5} = 35\sqrt{5}$……… $\sqrt{7^2.3} = 7\sqrt{3}$……………………

5) Associe chaque racine carrée à sa forme simplifiée.

$\sqrt{32}$ •	• $2\sqrt{2}$
$\sqrt{50}$ •	• $2\sqrt{5}$
$\sqrt{20}$ •	• $4\sqrt{2}$
$\sqrt{8}$ •	• $5\sqrt{2}$

2. Théorème de Pythagore

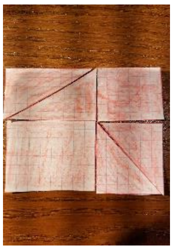
2.1 Découverte

Construire

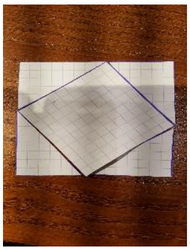
- ✓ 1 carré blanc de 5 cm de côté
- ✓ 4 triangles blancs de côté 3 cm, 4 cm et 5 cm
- ✓ 4 triangles rouges de côtés 3cm, 4cm et 5 cm
- ✓ 1 carré rouge de 3 cm de côté
- ✓ 1 carré rouge de 4 cm de côté

➔ En assemblant toutes les figures de même couleur, construis 2 nouveaux carrés. Dès que tu as trouvé la solution, fait le schéma des 2 carrés ci-dessous :

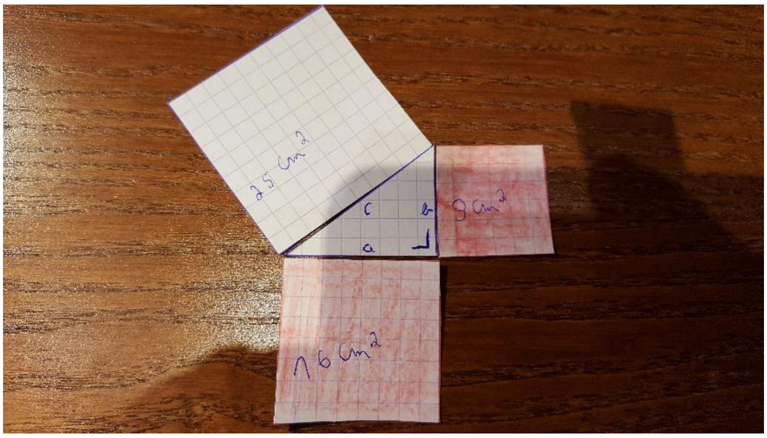
Carré rouge



Carré blanc



➔ A présent, positionne sur ton banc, les 3 carrés autour d'un des triangles et représente cette situation ci-dessous.



➔ Maintenant, écris sur chacun des côtés du triangle leur longueur (« a », « b » et « c ») et, dans chacun des carrés, leur aire.

➔ Ce triangle est un triangle particulier. Il s'agit d'un triangle rectangle.

2.2 Enoncé du théorème de Pythagore

- En termes de longueurs

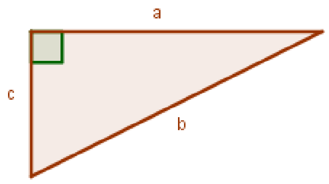
A CONNAITRE

Dans un triangle rectangle, le carré de la mesure de l'hypoténuse est égal la somme des carrés des mesures des deux autres côtés.

2.3 Applications

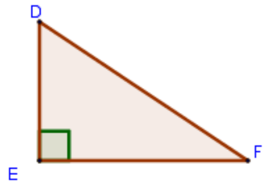
Ex 1 : Pour chacun des triangles rectangles ci-dessous, écris la relation de Pythagore.

a)



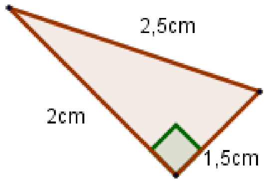
$b^2 = a^2 + c^2$

b)



$|DF|^2 = |DE|^2 + |EF|^2$

c)



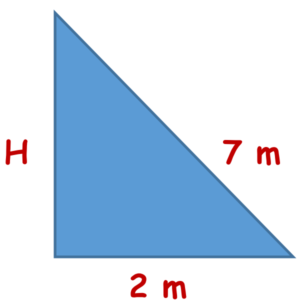
$2{,}5^2 = 2^2 + 1{,}5^2$

$6{,}25 = 4 + 2{,}25$

Ex 2 : Sachant que le triangle ABC est rectangle en A, complète les tableaux ci-dessous.

	|AB|	|AC|	|BC|
1)	7	8	$\|BC\|^2 = 7^2 + 8^2$ $= 49 + 64 = 113$ $\|BC\| = \sqrt{118} = 10{,}86$
2)	9	$\|AC\|^2 = 12^2 - 9^2$ $= 144 - 81 = 63$ $\|AC\| = \sqrt{63} = 7{,}94$	12
3)	$\|AB\|^2 = 16^2 - 4^2$ $= 256 - 16 = 240$ $\|AB\| = \sqrt{240} = 15{,}49$	4	16

Ex 3 : L'extrémité d'une échelle de 7 m de long est appuyée contre un mur vertical et son pied est à 2 m du mur.
Calcule la hauteur du point d'appui du sommet de l'échelle contre le mur.

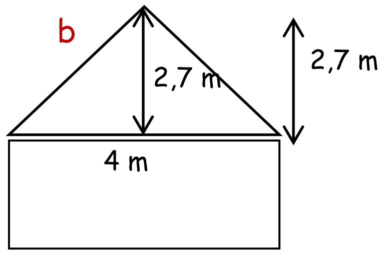


$H^2 = 7^2 - 2^2 = 49 - 4 = 45$

$H = \sqrt{45} = 6{,}71$ m

Ex 4 : Le dessin ci-dessous montre une partie du pignon (la pointe se trouve au milieu, il s'agit d'un triangle rectangle-isocèle) d'une maison.

Rechercher la valeur de b (au dixième près)

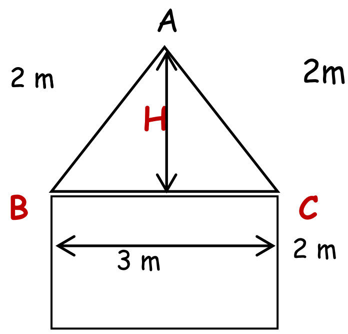


$b^2 = 2^2 + 2{,}7^2 = 4 + 7{,}29 = 11{,}29$

$b = \sqrt{11{,}29} = 3{,}3\text{m}$

Ex 5 : Le schéma de la charpente d'un hangar est donné ci-dessous.

Calculer la hauteur de A par rapport à BC (au centième près)

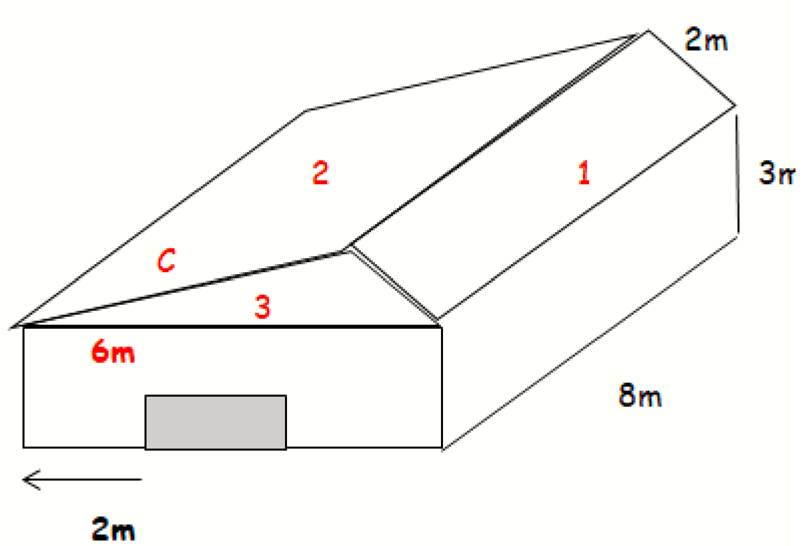


$H^2 = 1{,}5^2 + 2^2 = 2{,}25 + 4 = 6{,}25$

$H = \sqrt{6{,}25} = 2{,}5\text{ m}$

Ex 6 : Pour couvrir le toit du petit atelier, il faut prévoir 20 tuiles au m².

Calcule la quantité de tuiles qu'il faut acheter



A_1 = aire de la partie 1 = 2. 8 = 16 m²

A_2 = aire de la partie 2 = C. 8 = 5,7. 8 = 46,6 m²

La partie 3 est un triangle rectangle

$C^2 = 6^2 - 2^2 = 36 - 4 = 32$

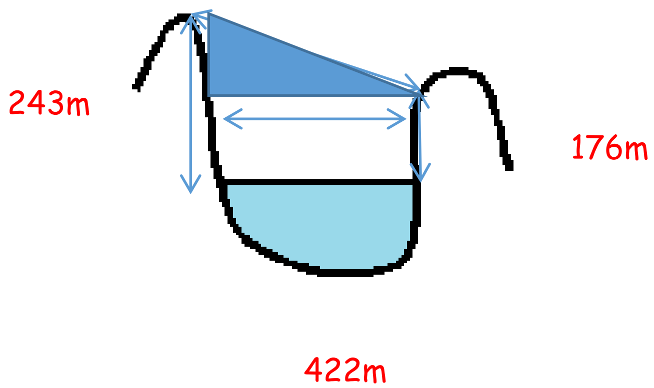
$C = \sqrt{32} = 5,7$ m

Aire du toit = $A_1 + A_2$ = 16 + 46,6 = 61,6 m²

Nombre de tuiles : 61,6. 20 = 1232

Ex 7 : Les points A et B sont situés sur les versants opposés d'un canal. On veut les connecter par un câble aérien. On sait que la distance horizontale entre A et B est de 422 m et on sait aussi qu'ils sont situés respectivement à 243 m et 176 m au-dessus du niveau de l'eau du canal.

Recherche la longueur du câble (au centième près)



Le triangle bleu est rectangle ayant pour côtés :

C1 = 422m et C2 = 243 – 176 = 67m

La longueur du câble est la longueur de l'hypoténuse :

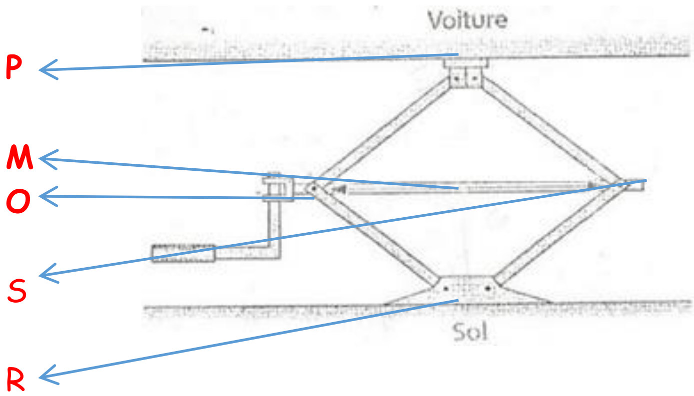
$L^2 = 422^2 + 67^2 = 182573$

$L = \sqrt{182573} = 427,29$m

Ex 8 : Le schéma ci-dessous montre un cric qui sert à soulever une voiture. Lorsqu'on tourne la manivelle, les points O et S se rapprochent et le point P s'élève. Chacune des 4 barres [PO], [OR], [RS] et [SP] mesure 25 cm.

- Calcule la hauteur de P au-dessus de R quand O et S sont distants de 40 cm.
- Quelle est la distance entre O et S quand P est 20 cm au-dessus de R ?

(tout arrondir au dixième près)



- M milieu de [OS]

  $|MO| = \frac{1}{2}|OS| = 40 : 2 = 20cm$

  Le triangle OMP est rectangle en M

  $|MP|^2 = |OP|^2 - |MO|^2$

  $= 25^2 - 20^2 = 625 - 400 = 225$

  $|MP| = \sqrt{225} = 15cm$

  $|PR| = 2. |MP| = 2. 15 = 30cm$

- Le triangle OMP est rectangle en M

  $|MP| = \frac{1}{2}|PR|$

  $|MP| = 20 : 2 = 10$ cm

  $|OM|^2 = 25^2 - 10^2 = 525$

  $|OM| = \sqrt{525} = 22{,}91cm$

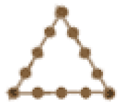
  $|OS| = 2.|OM| = 2. 22{,}91 = 45{,}83cm$

3. Réciproque du théorème de Pythagore

3.1 Découverte

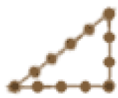
Sur une corde, 13 traits équidistants. Ferme-la en faisant coïncider le premier et le 13^{e} trait. Tu obtiens donc une corde fermée sur laquelle on peut compter 12 intervalles de même longueur. En tendant la corde, il est possible de former des triangles dont les sommets coïncident avec un des traits.
Combien de triangles peux-tu construire ? Dans chaque cas, précise la nature du triangle ainsi que le nombre d'intervalles sur chacun des côtés.

Triangle équilatéral



Quatre intervalles par côté

Triangle rectangle



Un côté à cinq intervalles (hypoténuse)
Un côté à quatre intervalles
Un côté à trois intervalles

3.2 Enoncé du théorème de la réciproque de Pythagore

A CONNAITRE

Si dans un triangle, le carré de la mesure d'un côté est égal la somme des carrés des mesures des deux autres côtés alors ce triangle est rectangle.

3.3 Applications

Ex 1 : Dans chaque cas, vérifie si le triangle est rectangle et précise le sommet de l'angle droit.

- $|AB| = 6$ $|BC| = 7$ $|AC| = 10$

$10^2 \neq 7^2 + 6^2$
$100 \neq 49 + 36$
$100 \neq 85$
Le triangle n'est pas rectangle car Pythagore n'est pas vérifié.

- $|AB| = 13$ $|BC| = 11$ $|AC| = 5$

$13^2 \neq 11^2 + 5^2$
$169 \neq 121 + 25$
$169 \neq 146$
Le triangle n'est pas rectangle car Pythagore n'est pas vérifié.

- $|AB| = 9$ $|BC| = 6$ $|AC| = 7$

$9^2 \neq 6^2 + 7^2$
$81 \neq 36 + 49$
$81 \neq 85$
Le triangle n'est pas rectangle car Pythagore n'est pas vérifié.

- $|AB| = 4$ $|BC| = 4$ $|AC| = \sqrt{30}$

$\sqrt{30}^2 \neq 4^2 + 4^2$
$30 \neq 16 + 16$
$30 \neq 32$
Le triangle n'est pas rectangle car Pythagore n'est pas vérifié.