Bonjour à tous.

J'espère que vous allez bien et que vous gardez le sourire.

J'ai préparé **des exercices de remédiation sur les CE et domaine de fonctions** car beaucoup d'entre vous font encore des erreurs soit dans l'écriture des CE de départ, soit dans la résolution. 😥

Ce module de remédiation n'est pas obligatoire, mais vivement conseillé pour ceux qui ont encore des difficultés avec les domaines.

Il y a ensuite une feuille **d'exercices de consolidation sur les limites.** Je vous recommande de les faire tous pour le **milieu de semaine prochaine**. Regardez les exercices résolus dans le cours et dans les différents correctifs envoyés pour ne plus faire les mêmes erreurs. 😉

Pour ceux qui comme moi s'inquiètent de l'avenir et qui aimeraient un peu avancer. J'ai conçu un **module de dépassement sur limites et asymptotes**.

On y aborde la méthode pour déterminer uniquement les asymptotes verticales et horizontales. Ce module est à rendre **pour le vendredi 8 mai à 16h**

Vous devez m'envoyer vos réponses complètes (en laissant tous vos calculs) à l'adresse suivante : mmesciorremath@gmail.com

Vous pouvez faire une photo (claire) ou scanner vos feuilles de résolution. Ecrivez lisiblement et n'oublier pas d'indiquer votre nom et prénom.

Si vous avez d'autres questions, n'hésitez pas à me les poser.

Un correctif ou des commentaires sur votre travail vous seront envoyés si le délai est respecté.

Prenez soin de vous.

Mme Sciorre

<u>Remédiation domaine de fonctions</u> :

N'appartiennent <u>PAS</u> au domaine de définition d'une fonction réelle :

Les nombres réels qui annulent un dénominateur ;

Les nombres réels qui rendent strictement négatif le radicant d'un radical d'indice pair.

Ainsi,

- **Si la fonction est un polynôme** :

Son domaine est $\mathbb{R}$.

- **Si la fonction est de la forme $\frac{f}{g}$** :

Il faut imposer au dénominateur d'être non-nul.
C'est-à-dire que la condition d'existence (notée C.E.) est $g(x) \neq 0$

Exemples :

a) Soit $f(x) = \frac{1}{x}$ CE :$x \neq 0$

Le domaine de cette fonction est $\mathbb{R}_0$

b) Soit $f(x) = \frac{x+3}{x^2-4}$ CE : $x^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow (x-2).(x+2) \neq 0$

La fonction n'est pas définie pour $x = 2$ et $x = -2$

$\Rightarrow dom\ f = \mathbb{R}\backslash\{-2; 2\}$

- **Si l'expression de la fonction contient un radical d'indice pair** :

Le radicant doit être positif.

Exemples :

c) Soit $f(x) = \sqrt{2x+3}$ CE :$2x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{3}{2}$

La fonction est définie pour tout réel supérieur à $-\frac{3}{2}$

$\Rightarrow dom\ f = [-\frac{3}{2}; +\infty[$

d) Soit $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x^2-4}}$ CE : $x^2 - 4 > 0$ car le radical est au dénominateur

Résoudre une inégalité du second degré avec un tableau de signes

x		-2		2	
$x^2 - 4$	+	0	-	0	+

$\Rightarrow dom\ f =]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$

e) Soit $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+5x}}{x^2-1}$ CE : $x^2 + 5x \geq 0$ (inégalité du sec deg, donc tabl de signes)
et $x^2 - 1 \neq 0$

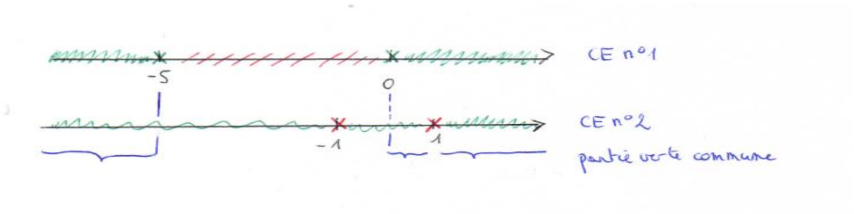
x		-5		0	
$x^2 + 5x$	+	0	-	0	+

Sol : $]-\infty; -5] \cup [0; +\infty[$

$x^2 - 1 \neq 0$

x$\neq 1$ et $x \neq -1$

Combiner plusieurs CE avec des droites :



Domf : $]-\infty; -5] \cup [0; 1[\cup]1; +\infty[$

Quelques exercices : Indique les CE et domaine des fonctions suivantes :

1) F(x) = $\frac{x+2}{-2x^2+11x-5}$
2) F(x) = $\sqrt{-2x+8}$
3) F(x) = $\frac{x^2-1}{\sqrt{5x-15}}$
4) F(x) = $\frac{3x+5}{\sqrt{-x^2+6x}}$
5) F(x) = $\frac{\sqrt{x^2-4x-12}}{x+1}$
6) F(x) = $2x + \sqrt{x^2-1}$
7) F(x) = $\sqrt{\frac{x^2-4x-12}{x+1}}$
8) F(x) = $\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{9-x^2}}$

Consolidation : calcul de limites

Calcule les limites suivantes, après avoir déterminé les CE et l'adhérence du domaine des fonctions.

Signale les cas d'indétermination des limites et lève celles-ci.

1) a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x+1}{-2x^2+x+1}$ b) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \frac{x+1}{-2x^2+x+1}$

2) a) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{2x^3-7x^2+4x-3}{x^2-9}$ b) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \frac{2x^3-7x^2+4x-3}{x^2-9}$

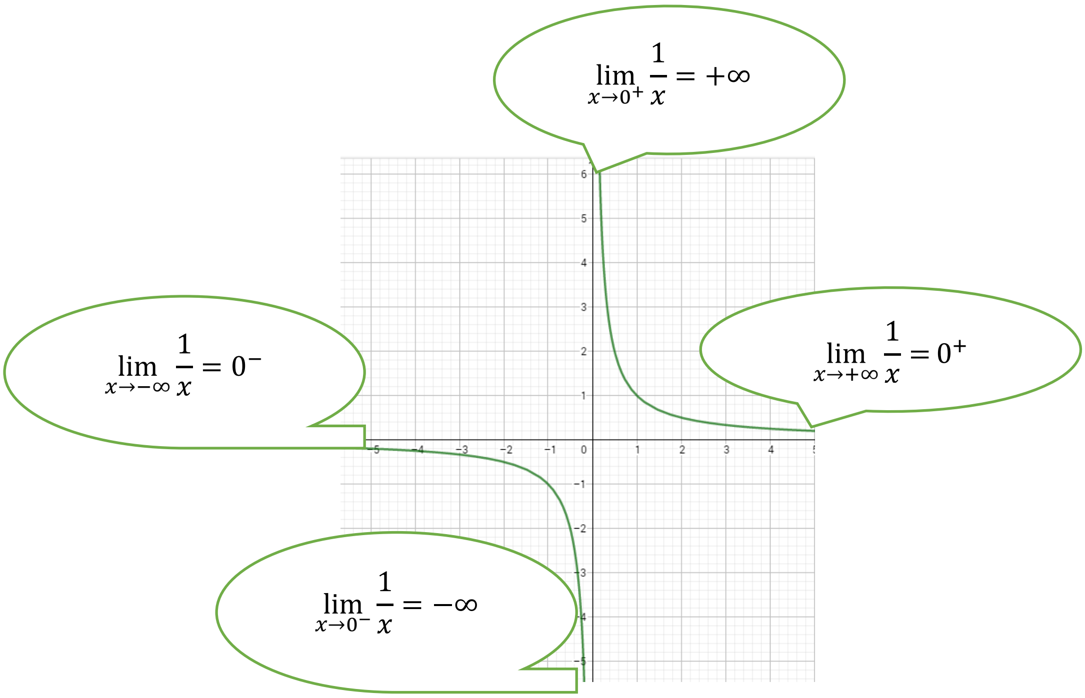
3) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \frac{x^3}{(x-2)^2} - x$

4) a) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{3x+9}{\sqrt{x^2-x-2}}$ b) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \frac{3x+9}{\sqrt{x^2-x-2}}$

Dépassement : <u>**dossier limites et asymptotes**</u>

J'ai écrit les limites de la fonction f(x) = $\frac{1}{x}$ aux « extrémités » du graphique dans les bulles, c'est-à-dire : en x = 0 car domf = R \ {0}

en + ∞ et - ∞



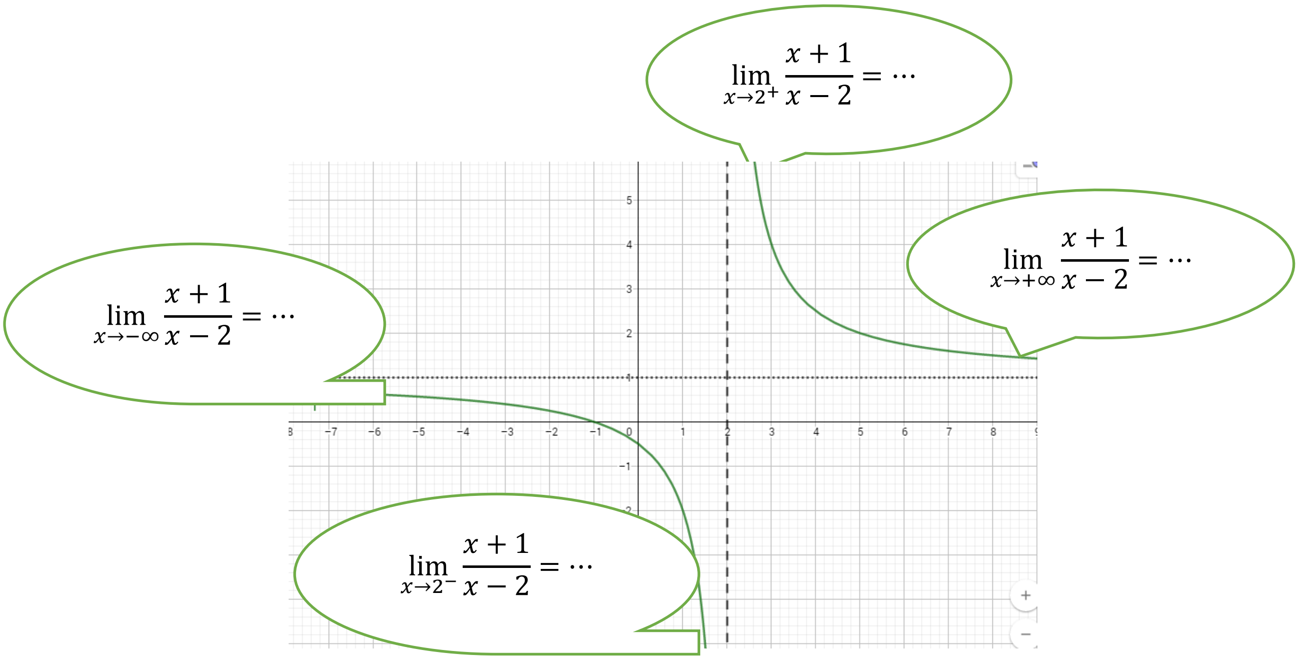
Dans chacune de ces bulles, il y le symbole ∞ soit pour x , soit dans la réponse de la limite, donc pour y. Ceci témoigne de la présence d'asymptotes.

En effet, sur ce graphique , $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ prouvent que la fonction longe la droite x = 0 (axe des y) ; on dira que la droite x = 0 est une asymptote verticale (AV)

En effet, sur ce graphique, $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0^-$et $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$ prouvent que la fonction longe la droite y = 0 (axe des x) ; on dira que la droite y = 0 est une asymptote horizontale (AH).

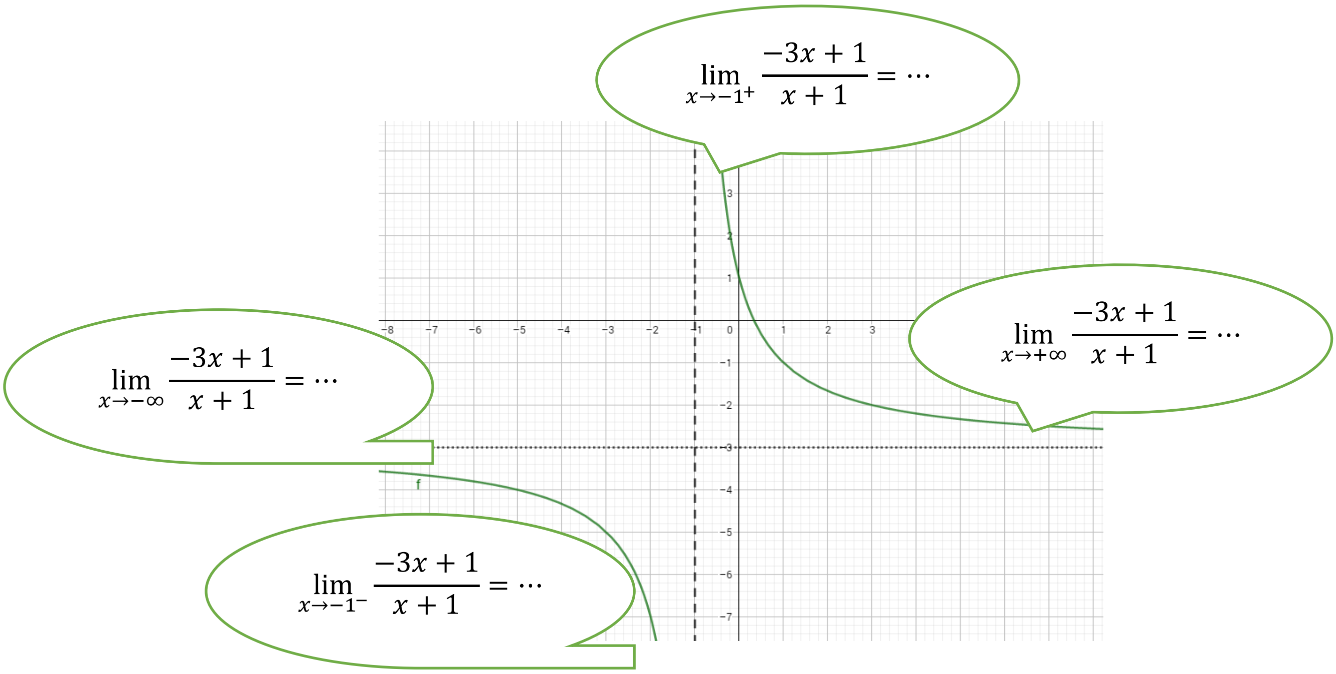
Exercice :

1)Pour la fonction f(x) = $\frac{x+1}{x-2}$, complète les réponses des limites dans les bulles. Indique les équations des asymptotes verticales et horizontales observées.



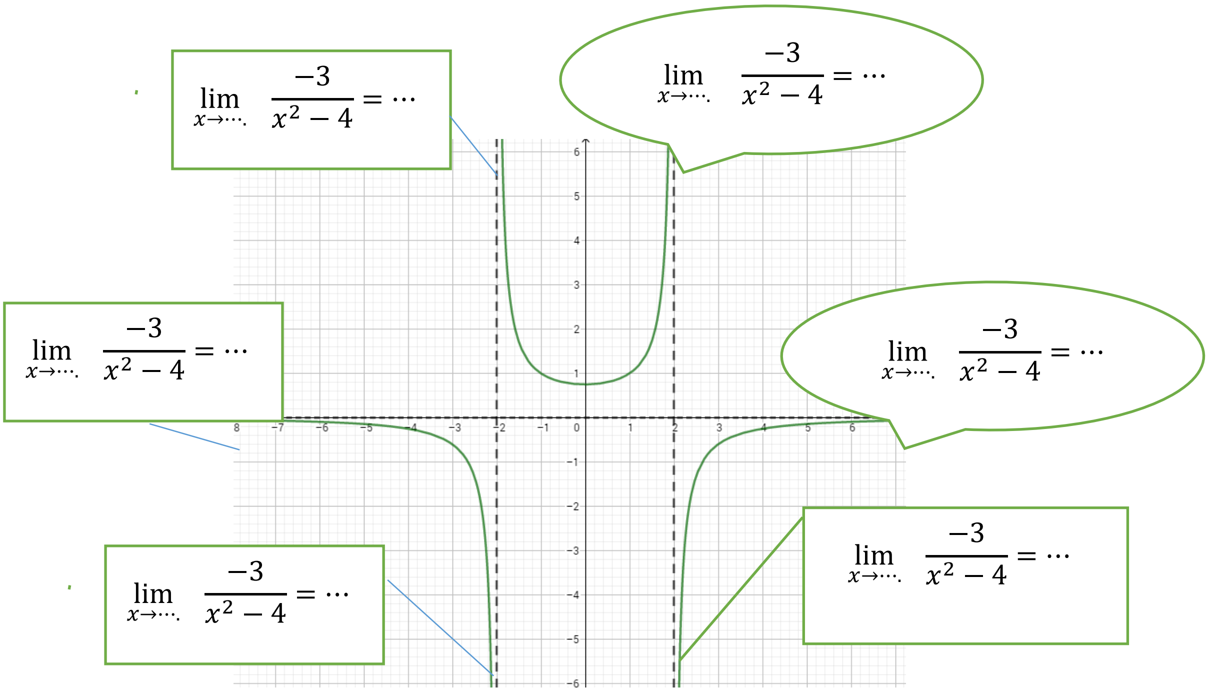
Équation de l'asymptote verticale : ……… Équation de l'asymptote horizontale : …………

2) Pour la fonction f(x) = $\frac{-3x+1}{x+1}$, complète les réponses des limites dans les bulles. Indique les équations des asymptotes verticales et horizontales observées.



Équation de l'asymptote verticale : ……… Équation de l'asymptote horizontale : …………

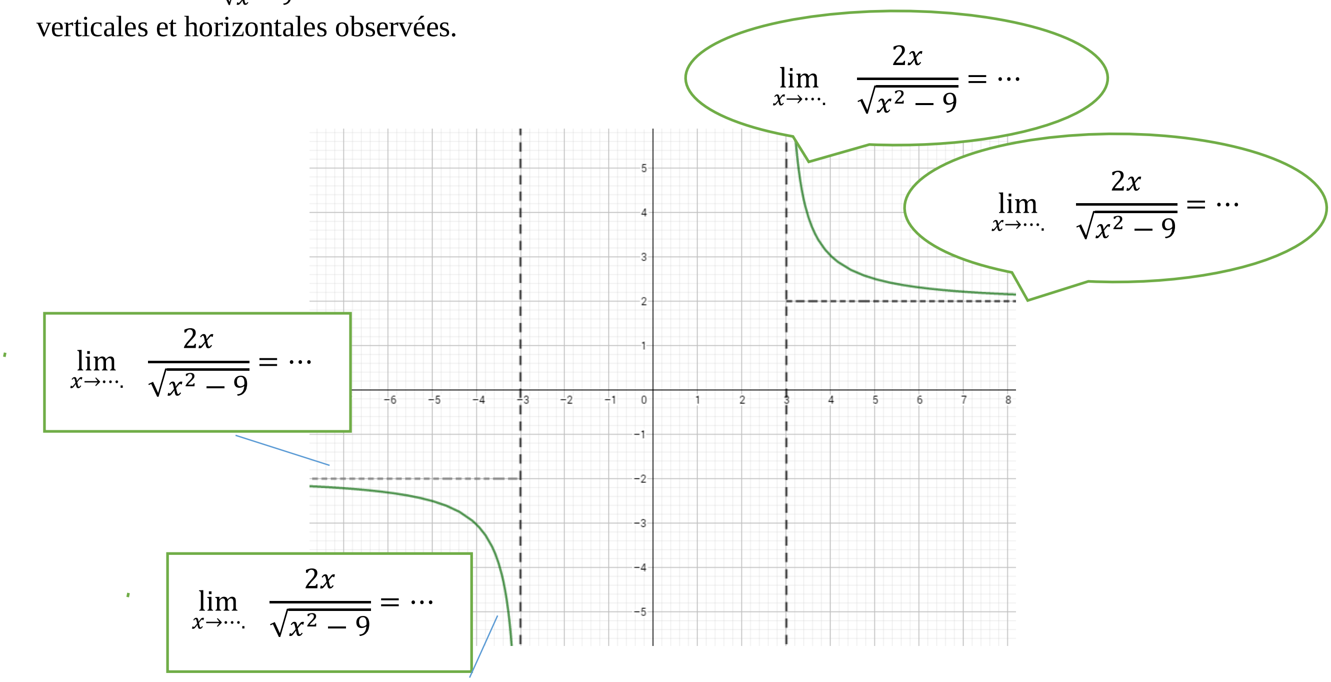
3) Pour la fonction f(x) = $\frac{-3}{x^2-4}$, complète les bulles (avec des limites). Indique les équations des asymptotes verticales et horizontales observées.



Équation des asymptotes verticales : ……… et ………………………

Équation de l'asymptote horizontale : …………

4) Pour f(x) = $\frac{2x}{\sqrt{x^2-9}}$, complète les bulles (avec des limites). Indique les équations des asymptotes verticales et horizontales observées.



Équations des asymptotes verticales : ……… à droite et …………… à gauche

Équations des asymptotes horizontales : ………… en +∞ et ………… en -∞.

En résumé,

Définition : **La droite d'équation x = a** (a réel) est **asymptote verticale** (à gauche et/ou à droite) au graphique de la fonction f **lorsque la limite (à gauche et/ou à droite) de f en a est infinie.**

AV ≡ x = a $\Leftrightarrow \lim_{x \to a_G} f(x) = (\pm)\infty$ où $a \in R$ et $\lim_{x \to a_D} f(x) = (\pm)\infty$ où $a \in R$

AV ≡ x = a à gauche $\Leftrightarrow \lim_{x \to a_G} f(x) = (\pm)\infty$ où $a \in R$

AV ≡ x = a à droite $\Leftrightarrow \lim_{x \to a_D} f(x) = (\pm)\infty$ où $a \in R$

Définition : **La droite d'équation y = b** (b réel) est **asymptote horizontale** (en +∞ et/ou -∞) au graphique de la fonction f **lorsque la limite (en +∞ et/ou -∞) de f est un nombre réel b.**

AH ≡ y = b $\Leftrightarrow \lim_{x \to \infty} f(x) = b$ où $b \in R$

AH ≡ y = b en -∞ $\Leftrightarrow \lim_{x \to -\infty} f(x) = b$ où $b \in R$

AH ≡ y = b en +∞ $\Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = b$ où $b \in R$

Comment faire pour déterminer les équations des asymptotes verticales et horizontales à l'aide de ces définitions ?

1°) déterminer le domaine et l'adhérence du domf.

2°) Calculer les limites en les réels qui adhèrent au domaine sans lui appartenir.

3°) Donner les équations des asymptotes verticales.

4°) Calculer les limites en $\pm\infty$ si elles existent (voir adhérence du domf).

5°) Donner les équations des asymptotes horizontales.

6°) calculer f(100) et f(-100) et comparer ces valeurs avec les AH. On peut alors savoir si la fonction est légèrement au dessus ou en dessous de l'AH.

7°) On peut esquisser le graphique de la fonction autour des asymptotes.

Exemple résolu : Calculons **les asymptotes verticales et horizontales** de f(x) = $\frac{2x^2}{x^2-2x-3}$

1°) CE : $x^2 - 2x - 3 \neq 0$ $\Delta = 16$ $x_1 = 3$ $x_2 =$ -1

Domf = $R\setminus\{3;-1\}$ et $\overline{domf} = R$

2°) Calculons $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2}{x^2-2x-3}$ et $\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x^2}{x^2-2x-3}$

$\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2}{x^2-2x-3} = \frac{18}{0}$ et $\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x^2}{x^2-2x-3} = \frac{2}{0}$

x		-1		3	
18 ou 2	+	+	+	+	+
x^2-2x-3	+	0	-	0	+
	+	/	-	/	+

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$ (*)

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = +\infty$ (**)

3°) asymptotes verticales x = -1 vu (*) et x = 3 vu (**)

4°) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2}{x^2-2x-3} = \frac{\infty}{\infty} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = 2$

5°) Comme la réponse précédente est un réel, il y a une asymptote horizontale

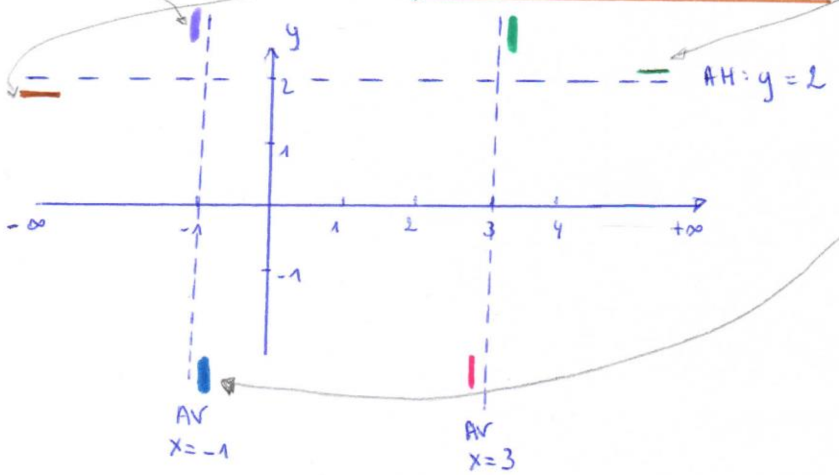
d'équation y = 2.

6°) f(100) = $\frac{2.100^2}{100^2-2.100-3} = 2{,}04144 > 2,$

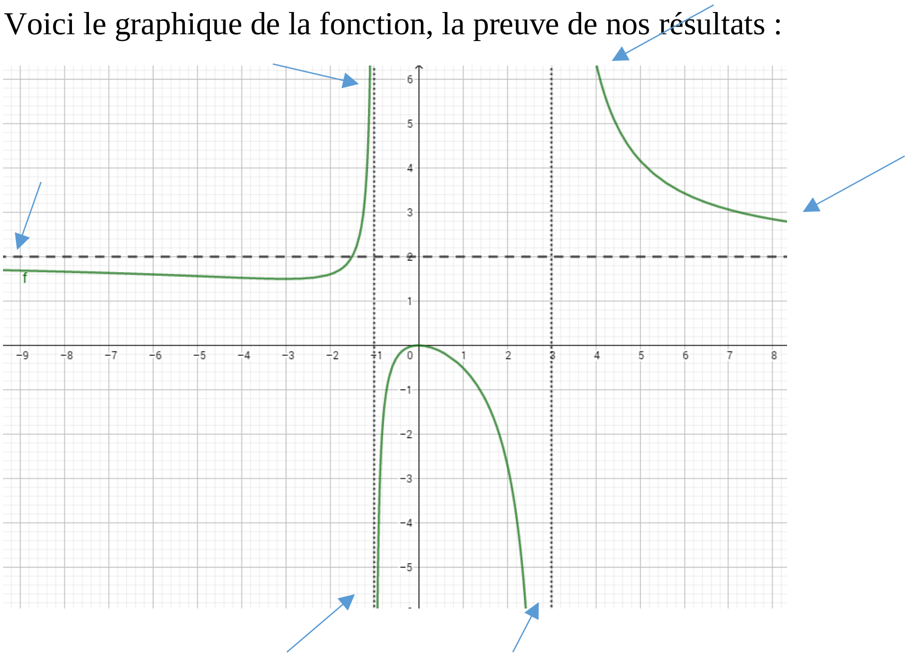
on en conclut que la fonction est au dessus de l'asymptote en + ∞ (100 représentant + ∞)

f(-100) = $\frac{2.(-100)^2}{(-100)^2-2.(-100)-3} = 1{,}96136 < 2,$

on en conclut que la fonction est au dessous de l'asymptote en - ∞ (-100 représentant - ∞)



Voici le graphique de la fonction, la preuve de nos résultats :



Exercices : Pour chaque fonction, procède de la même façon que l'exemple résolu sur la page précédente en appliquant les étapes 1° à 7° (voir p8).

Détermine le domaine de définition, son adhérence. A l'aide du calculs des limites, les équations des asymptotes verticales et horizontales. Esquisser un graphique avec les asymptotes et la position de la fonction près des asymptotes.

1) F(x) = $\frac{-3x^2}{x^2+x-6}$
2) F(x) = $\frac{2x}{(x-1)^2}$
3) F(x) = $\frac{x^2-9}{x^2-4}$