UAA 9 – Intégrale

Chapitre 1 – Primitives & intégrales définies

Plan du chapitre

Objectifs

Compétences à développer

Résoudre un problème à l'aide du calcul intégral.

Ressources

- Encadrement d'une aire, d'un volume
- Intégrale définie
- Théorème fondamental
- Primitives
- Aire d'une surface plane
- Volume d'un solide de révolution

Processus

Connaître

- Illustrer graphiquement et justifier la formule du calcul d'une aire
- Illustrer graphiquement la formule du calcul du volume d'un solide de révolution
- Écrire les intégrales qui permettent de calculer l'aire d'une zone sélectionnée sur un graphique

Appliquer

- Approximer une aire par une somme d'aires élémentaires à l'aide de l'outil informatique
- Vérifier qu'une fonction donnée est la primitive d'une aire
- Déterminer une primitive
- Calculer une intégrale définie
- Calculer une aire, un volume de solide de révolution

Transférer

- Résoudre un problème en utilisant le calcul intégral

« . . . Je cherchai une méthode pour déterminer les grandeurs d'après les vitesses des mouvements ou accroissements qui les engendrent [. . .]. Je suis tombé, vers les années 1665, sur la méthode des *fluxions*, dont je ferai usage dans la *quadrature* des courbes . . . »

Isaac Newton, en 1704

1 Introduction

Activité 1.

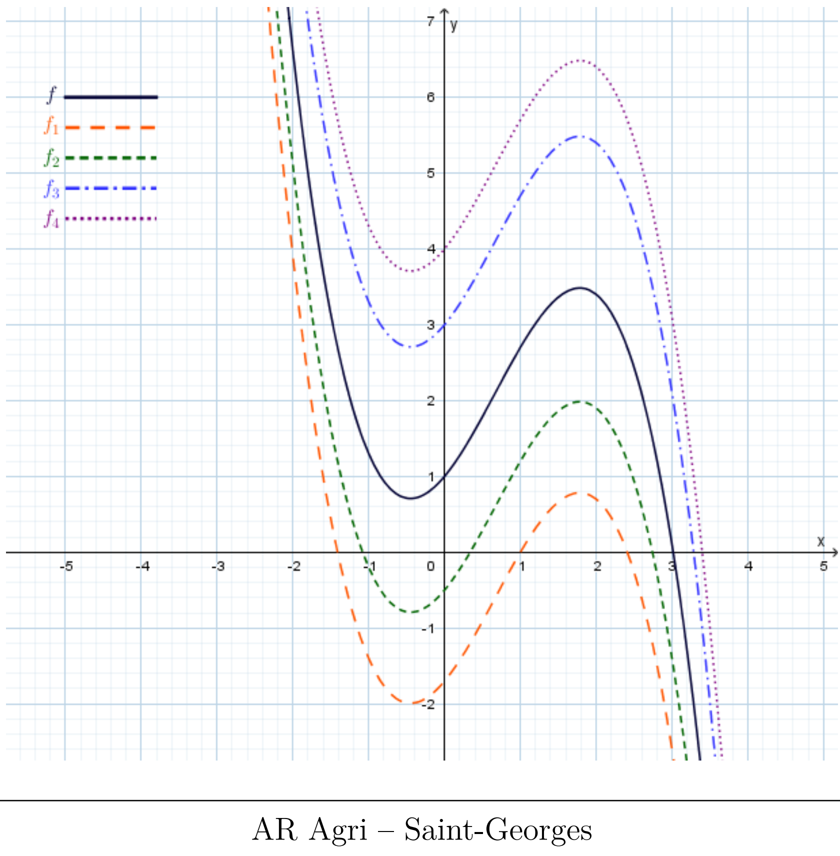
(1) Soit la fonction

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + x^2 + \frac{6}{5}x + 1$$

et ses transformées

$$f_1(x) = f(x) - 2,7$$
$$f_2(x) = f(x) - \frac{3}{2}$$
$$f_3(x) = f(x) + 2$$
$$f_4(x) = f(x) + 3$$

Ces cinq fonctions sont représentée dans le repère orthonormé ci-dessous :



(a) Que remarques-tu ?

-
-

(b) Quel « outil » vu en 5e année permet d'étudier la variation d'une fonction ?

(c) En observant les courbes représentées plus haut, que peux-tu dire des dérivées des cinq fonctions mentionnées ?

<u>Conclusion :</u> Deux fonctions égales à une constante additive près possèdent la même dérivée.

(2) Soit la fonction définie par

$$f(x) = 7x^6$$

(a) Donne les expressions de cinq fonctions qui ont f pour dérivée.

-
-
-
-
-

(b) Compare ces cinq fonctions les unes aux autres. Que constates-tu ?

(c) Écris l'expression générale des fonctions F qui vérifient $F'(x) = f(x)$ (appelées **primitives** de f).

<u>Conclusion :</u> Il existe une infinité de fonctions qui possèdent la même dérivée ; elles sont toutes égales à une constante additive près.

(d) Détermine la primitive de f qui s'annule en 1.

(3) Vrai ou faux ? Justifie tes choix.

(a) Les fonctions définies par $(x-3)^2$ et x^2+5 sont des primitives de $2x$.

(b) Les fonctions définies par $\dfrac{5x+2}{x}$ et $7+\dfrac{2}{x}$ sont des primitives de la même fonction.

(c) La fonction $2\sin(3x)$ est une primitive de $\cos(3x)$.

(d) Les fonctions définies par $ln(x)$ et $ln(2x)$ sont des primitives de la fonction inverse.

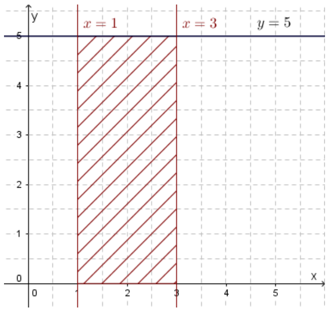
(e) Le produit d'une primitive de f et d'une primitive de g est une primitive de $f \cdot g$.

Activité 2 (Aire sous une courbe).
Pour calculer l'aire d'une partie du plan, les mathématiciens grecs utilisaient des méthodes géométriques consistant à transformer la partie donnée en un ou plusieurs polygones dont les aires sont plus faciles à calculer.

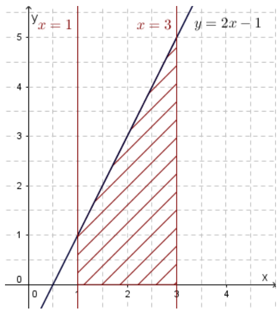
Essayons cette méthode pour déterminer l'aire A d'une surface S limitée par le graphique d'une fonction f positive et continue sur l'intervalle fermé $[a\,;b]$, l'axe $\mathcal{O}_x$ et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.

Pour certaines fonctions, la tâche est simple.

(1) Soient $f(x) = 5$, $a = 1$ et $b = 3$.
Le graphique de cette fonction est donné par L'aire de la partie hachurée vaut :



(2) Soient $f(x) = 2x - 1$, $a = 1$ et $b = 3$.
Le graphique de cette fonction est donné par L'aire de la partie hachurée vaut :

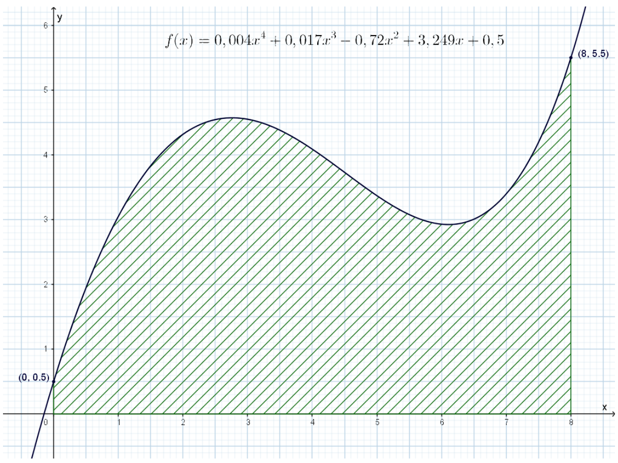


Pour d'autres fonctions, la tâche est plus compliquée...

(3) Soit la fonction

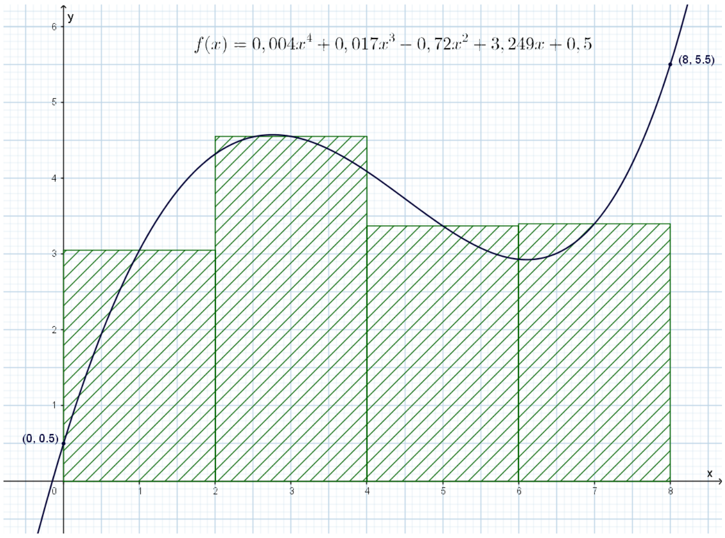
$$f(x) = 0,004x^4 + 0,017x^3 - 0,72x^2 + 3,249x + 0,5$$

On veut estimer l'aire de la surface hachurée sur le graphique suivant :

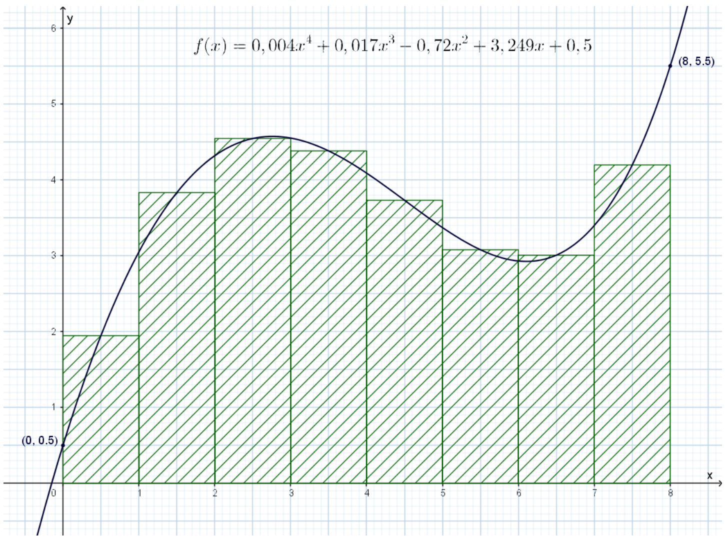


En appliquant la méthode des mathématiciens grecs de l'Antiquité, on va découper cette surface en plusieurs rectangles et calculer l'aire de ceux-ci.

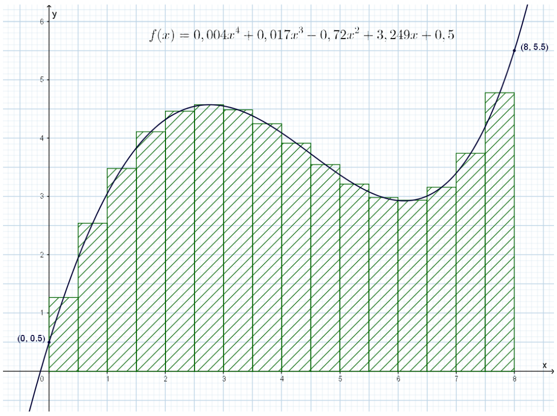
(a) Calcule la somme des aires des 4 rectangles hachurés :



(b) Calcule la somme des aires des 8 rectangles hachurés :

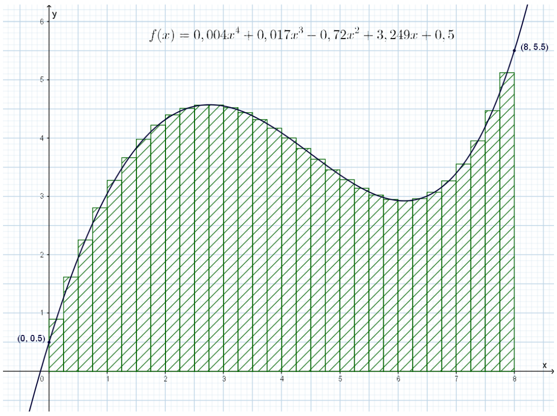


(c) A l'aide d'un logiciel (Geogebra), on a déterminé la somme des aires des 16 rectangles hachurés :



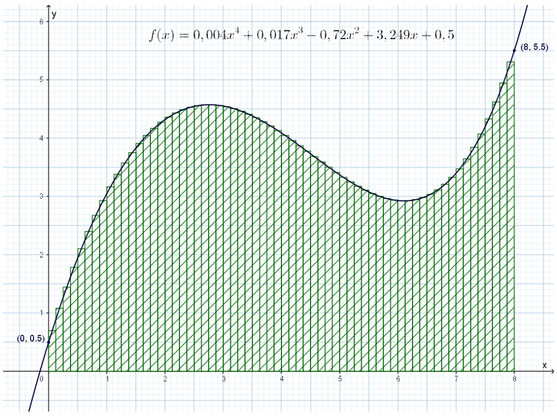
L'aire hachurée vaut 28.711 13 ua (arrondi à 5 décimales).

(d) A l'aide du même logiciel, on a déterminé la somme des aires des 32 rectangles hachurés :



L'aire hachurée vaut 28.710 57 ua (arrondi à 5 décimales).

(e) A l'aide du même logiciel, on a déterminé la somme des aires des 64 rectangles hachurés :



L'aire hachurée vaut 28.710 44 ua (arrondi à 5 décimales).

A l'aide du même logiciel, on a calculé l'aire exacte de la surface hachurée sous la courbe sur le premier graphique (page 4) : elle vaut 28.7104 ua.

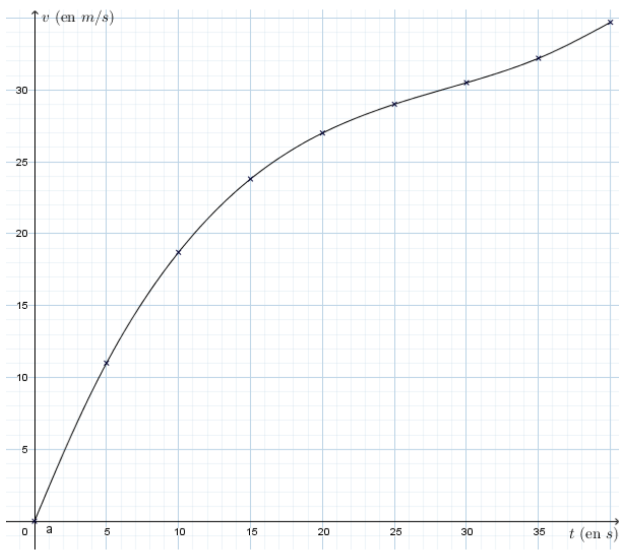
Compare les résultats obtenus aux points (a), (b), (c), (d) et (e).
Que remarques-tu ?

Activité 3 (Vitesse et déplacement).
Lors du salon de l'auto, Philippe a pu tester un nouveau véhicule.

Le vendeur a relevé sa vitesse toutes les cinq secondes et les valeurs obtenues ont été portées dans le tableau ci-dessous :

t (en s)	0	5	10	15	20	25	30	35	40
v (en m/s)	0	11	$18,7$	$23,8$	27	29	$30,5$	$32,2$	$34,7$

A l'aide d'un tableur (Geogebra), on a pu obtenir le graphique d'une fonction qui modélise l'évolution de la vitesse au cours de ces quarante secondes.



On demande d'estimer la distance totale parcourue par le véhicule pendant ces quarante secondes.

Pendant les cinq premières secondes, la vitesse passe de 0 m/s à 11 m/s. La distance parcourue est donc comprise entre $5 \,.\, 0 = 0\,\text{m}$ et $5 \,.\, 11 = 55\,\text{m}$.

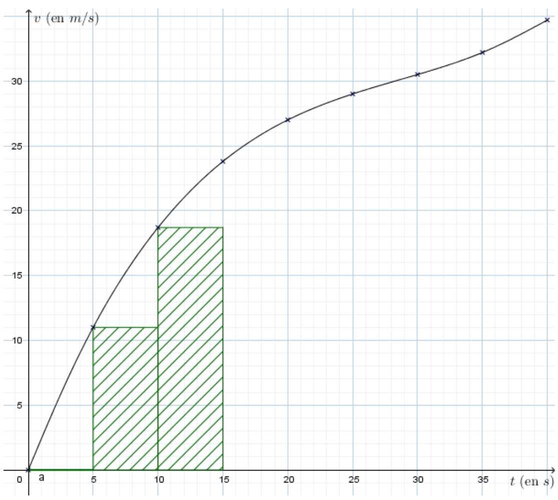
Ce raisonnement peut être répété pour chaque intervalle de temps. La procédure s'achève par le calcul de la somme de ces estimations.

(1) Complète le tableau suivant :

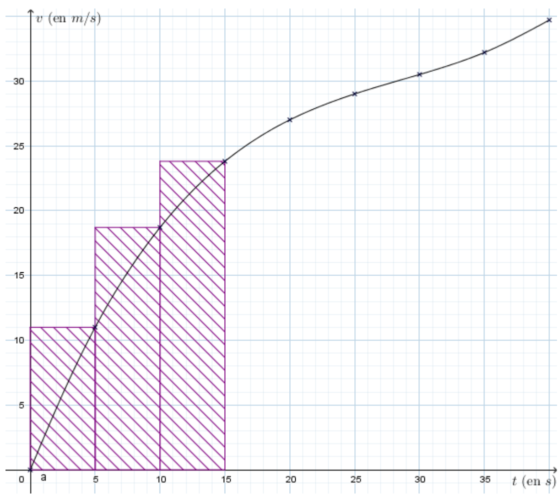
Intervalle de temps (en s)	Vitesse sur l'intervalle (en m/s)		Distance parcourue (en m)	
	min	max	min	max
$[0\,;5]$	0	11	5 . 0 = 0	5 . 11 = 55
$[5\,;10]$				
$[10\,;15]$				
$[15\,;20]$				
$[20\,;25]$				
$[25\,;30]$				
$[30\,;35]$				
$[35\,;40]$				

(2) Donne un encadrement de la distance totale parcourue pendant ces quarante secondes.

(3) Complète les graphiques ci-dessous pour qu'ils correspondent aux valeurs reprises dans les deux dernières colonnes du tableau précédent.



Somme inférieure de Darboux



Somme supérieure de Darboux

(4) Comment peut-on représenter la distance parcourue pendant les quarante secondes de l'observation sur le graphique de l'évolution de la vitesse ?

(5) Comment pourrait-on améliorer la précision de notre encadrement ?

L'activité 3 est extraite de : Van Eerdenbrugghe et al., *Cqfd* 6^{e}, De Boeck (2018)

2 Primitives

2.1 Définition

Définition.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)$ une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On appelle **primitive de f sur I** toute fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto F(x)$ qui vérifie

$$F'(x) = f(x)$$

pour tout réel $x \in I$. Autrement dit, F est une primitive de f si et seulement si f est la dérivée de F.

Exemples.

(a) La fonction

$$F(x) = \sin(x)$$

est *une* primitive de la fonction

$$f(x) = \cos(x)$$

car $\sin'(x) = \cos(x)$.

(b) La fonction

$$F(x) = x^6 + 32$$

est *une* primitive de la fonction

$$f(x) = 6x^5$$

car $(x^6 + 32)' = 6x^5$.

On admet le résultat suivant

Propriété.
Si F est une primitive de la fonction f, alors l'ensemble des primitives de f est l'ensemble des fonctions de la forme $F + k$ où k est un réel.

Notation.
L'ensemble des primitives d'une fonction f (parfois appelé **intégrale non définie** de f) est noté

$$\int f(x)\ \mathrm{d}x$$

Exemple.
Les primitives de la fonction $f(x) = 3x^2$ sont données par

$$\int 3x^2\ \mathrm{d}x = x^3 + k$$

car

$$(x^3 + k)' = 3x^2$$

quel que soit le réel k.

2.2 Primitives immédiates

On appelle **primitive immédiate** (ou **primitive élémentaire**) toute primitive qui découle des formules de dérivation de base.

Complète les tableaux suivants, dans lesquels k et n représentent des réels quelconques.

Fonction	Dérivée
$c+k$	
$x+k$	
x^2+k	
x^3+k	
x^n+k	
$\ln(x)+k$	
e^x+k	
a^x+k	
$\cos(x)+k$	
$\sin(x)+k$	
$\operatorname{tg}(x)+k$	
$\operatorname{cotg}(x)+k$	

Fonction	Primitive	
0		
1		
x		
x^2		
x^n		
$\frac{1}{x}$		
e^x		
a^x		
$\sin(x)$		
$\cos(x)$		
$\frac{1}{\cos^2(x)}$		$1+\operatorname{tg}^2(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}$
$\frac{1}{\sin^2(x)}$		$1+\operatorname{cotg}^2(x)=\frac{1}{\sin^2(x)}$

Dans la suite, toutes les fonctions mentionnées seront supposées définies, continues et dérivables sur un intervalle réel.

2.3 Primitives quasi-immédiates

Combinaison linéaire

Rappel.
Une **combinaison linéaire** de deux fonctions f et g est une fonction de la forme

$$a\,.\,f + b\,.\,g$$

où a et b sont des réels quelconques non simultanément nuls.

Propriété.
Pour toutes fonctions f et g et tous réels a et b, on a

$$\int a\,.\,f(x) + b\,.\,g(x)\ \mathrm{d}x = a\,.\int f(x)\ \mathrm{d}x + b\,.\int g(x)\ \mathrm{d}x$$

Autrement dit, l'ensemble des primitives d'une combinaison linéaire de deux fonctions est la combinaison linéaire correspondante des primitives de ces fonctions.

Démonstration.
Soient F et G des primitives des fonctions f et g, respectivement. On a

$$\begin{aligned}\left(a\,.\int f(x)\ \mathrm{d}x + b\,.\int g(x)\ \mathrm{d}x\right)' &= (a\,.\,(F(x)+k) + b\,.\,(G(x)+k))' \\ &= a\,.\,(F(x)+k)' + b\,.\,(G(x)+k)' \\ &= a\,.\,(f(x)+0) + b\,.\,(g(x)+0) \\ &= a\,.\,f(x) + b\,.\,g(x)\end{aligned}$$

D'où la conclusion. ■

Exemple.
On a

$$\begin{aligned}\int 2\cos(x) - 3x^5\ \mathrm{d}x &= 2\,.\int \cos(x)\ \mathrm{d}x - 3\,.\int x^5\ \mathrm{d}x \\ &= 2\sin(x) - 3\,.\,\frac{x^6}{6} + k \\ &= 2\sin(x) - \frac{1}{2}x^6 + k\end{aligned}$$

Dérivée d'une composée

Propriété.
Pour toutes fonctions f et g, on a

$$\int f'(g(x))\,.\,g'(x)\ \mathrm{d}x = f(g(x)) + k$$

Exemples.

(a) On a

$$\int \frac{5}{\cos^2(5x-2)}\ \mathrm{d}x = \mathrm{tg}(5x-2) + k$$

car

$$(5x-2)' = 5 \quad \text{et} \quad (\mathrm{tg}(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

(b) On a

$$\int x\,.\,(7x^2+6)^3\ \mathrm{d}x = \frac{1}{14}\int 14x\,.\,(7x^2+6)^3\ \mathrm{d}x = \frac{(7x^2+6)^4}{4} + k$$

car

$$(7x^2+6)' = 14x \quad \text{et} \quad \left(\frac{x^4}{4}\right)' = x^3$$

Produit de polynôme

Si la fonction à primitiver est un produit de polynômes, il faut

(1) effectuer le produit

(2) ordonner et réduire le polynôme

(3) appliquer la formule de primitivation d'une combinaison linéaire.

Exemple.

On a

$$\begin{aligned}\int (2x-7)\,.\,(3x^3+4x^2-x+5)\ \mathrm{d}x &= \int 6x^4+8x^3-2x^2+10x-21x^3-28x^2+7x-35\ \mathrm{d}x\\ &= \int 6x^4-13x^3-30x^2+17x-35\ \mathrm{d}x\\ &= \frac{6x^5}{5}-\frac{13x^4}{4}-\frac{30x^3}{3}+\frac{17x^2}{2}-35x+k\\ &= \frac{6}{5}x^5-\frac{13}{4}x^4-10x^3+\frac{17}{2}x^2-35x+k\end{aligned}$$

Division euclidienne

Si la fonction à primitiver est un quotient de polynômes tels que le degré du numérateur est supérieur ou égal au degré du dénominateur, il faut

(1) effectuer la division euclidienne

(2) appliquer la formule de primitivation d'une combinaison linéaire

(3) appliquer la formule de primitivation d'une dérivée de composée.

Exemple.

On veut calculer $\displaystyle\int \frac{4x^3+6x^2+2x-1}{2x+3}\ \mathrm{d}x$.

La division euclidienne donne

$$\begin{array}{rrrrrrrr|l} & 4x^3 & + & 6x^2 & + & 2x & - & 1 & 2x+3 \\ \cline{9-9} - & 4x^3 & + & 6x^2 & & & & & 2x^2+1 \\ \cline{2-8} & & & & & 2x & - & 1 & \\ - & & & & & 2x & + & 3 & \\ \cline{2-8} & & & & & & & -4 & \end{array}$$

Dès lors,

$$\frac{4x^3+6x^2+2x-1}{2x+3} = 2x^2+1+\frac{-4}{2x+3}$$

Ainsi, on trouve finalement

$$\begin{aligned} \int \frac{4x^3+6x^2+2x-1}{2x+3}\ \mathrm{d}x &= \int 2x^2+1+\frac{-4}{2x+3}\ \mathrm{d}x \\ &= \int 2x^2+1\ \mathrm{d}x - 2\,.\int \frac{2}{2x+3}\ \mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{3}x^3+x-2\,.\ \ln|2x+3|+k \end{aligned}$$

2.4 Primitives par substitution

Propriété.
Pour toutes fonctions f et g, on a

$$\int f\left(g(x)\right).g'(x)\ \mathrm{d}x = \int f(t)\ \mathrm{d}t$$

en posant $t = g(x)$.

Démonstration.
Soit F une primitive de f. On a

$$\begin{aligned} \left(\int f(t)\ \mathrm{d}t\right)' &= (F(t)+k)' \\ &= \left(F\left(g(x)\right)+k\right)' \\ &= F'\left(g(x)\right).g'(x)+0 \\ &= f\left(g(x)\right).g'(x) \end{aligned}$$

D'où la conclusion. ■

Remarque.
Cette formule est fort semblable à celle de la primitivation des fonctions composées. Ce qui les différencie, c'est que dans la formule de primitivation par substitution, les primitives de f ne sont pas connues préalablement.

Exemple.
On veut calculer $\displaystyle\int (3x^2 - 8x + 5) \,.\, \sqrt{x^3 - 4x^2 + 5x - 1} \; \mathrm{d}x\,.$

On pose

$$\begin{aligned} t &= x^3 - 4x^2 + 5x - 1 \\ \mathrm{d}t &= (3x^2 - 8x + 5)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Ainsi, on obtiens successivement

$$\begin{aligned} \int (3x^2 - 8x + 5) \,.\, \sqrt{x^3 - 4x^2 + 5x - 1} \; \mathrm{d}x &= \int \sqrt{t} \; \mathrm{d}t \\ &= \int t^{1/2} \; \mathrm{d}t \\ &= \frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}} + k \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{t^3} + k \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{(x^3 - 4x^2 + 5x - 1)^3} + k \end{aligned}$$

2.5 Primitivation par changement de variable

Propriété.
Pour toutes fonction f, on a

$$\int f(x) \; \mathrm{d}x = \int f\left(g(t)\right) . \, g'(t) \; \mathrm{d}t$$

en posant $x = g(t)$.

Exemple.
On veut calculer $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)^2} \; \mathrm{d}x\,.$

On pose

$$\begin{aligned} t = x + 1 \;\Leftrightarrow\; x &= t - 1 \\ \mathrm{d}x &= \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Ainsi, on obtiens successivement

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{(x+1)^2} \; \mathrm{d}x &= \int \frac{t-1}{t^2} \; \mathrm{d}t \\ &= \int \frac{1}{t} - t^{-2} \; \mathrm{d}t \\ &= \ln|t| + \frac{1}{t} + k \\ &= \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + k \end{aligned}$$

2.6 Primitivation par partie

Propriété.
Pour toutes fonctions f et g, on a

$$\int f(x)\,.\,g'(x)\ \mathrm{d}x = f(x)\,.\,g(x) - \int f'(x)\,.\,g(x)\ \mathrm{d}x$$

Démonstration.
Vu la formule de dérivation d'un produit de deux fonctions, on a

$$(f(x)\,.\,g(x))' = f'(x)\,.\,g(x) + f(x)\,.\,g'(x)$$

Ainsi, en primitivant les deux membres de cette formule, on obtient

$$\int (f(x)\,.\,g(x))'\ \mathrm{d}x = \int f'(x)\,.\,g(x) + f(x)\,.\,g'(x)\ \mathrm{d}x$$

ce qui peut se réécrire

$$f(x)\,.\,g(x) = \int f'(x)\,.\,g(x)\ \mathrm{d}x + \int f(x)\,.\,g'(x)\ \mathrm{d}x$$

D'où la conclusion en isolant $\int f'(x)\,.\,g(x)\ \mathrm{d}x$. ■

Exemple.
On veut calculer $\int x\,.\,\cos(x)\ \mathrm{d}x$.

On pose

$$\begin{aligned} f(x) &= x \quad ; \quad f'(x) = 1 \\ g'(x) &= \cos(x) \quad ; \quad g(x) = \sin(x) \end{aligned}$$

La formule de primitivation par parties donne alors

$$\begin{aligned} \int x\,.\,\cos(x)\ \mathrm{d}x &= x\,.\,\sin(x) - \int 1\,.\,\sin(x)\ \mathrm{d}x \\ &= x\,.\,\sin(x) - \int \sin(x)\ \mathrm{d}x \\ &= x\,.\,\sin(x) - (-\cos(x)) + k \\ &= x\,.\,\sin(x) + \cos(x) + k \end{aligned}$$

2.7 Autres méthodes de résolution

Il existe des méthodes de calcul de primitives plus complexes.

Cette section explicite une de ces méthodes mais tu ne dois pas être capable de l'appliquer dans des exercices : c'est la méthode de **primitivation par décomposition en somme de fractions simples**.

Rappel.
Une **fraction simple** est une fonction rationnelle d'une des deux formes suivantes :

(1) $\dfrac{p}{(ax+b)^n}$, avec $n \in \mathbb{N}_0$

(2) $\dfrac{px+q}{(ax^2+bx+c)^n}$, avec $n \in \mathbb{N}_0$ et $\Delta < 0$.

Si la fonction à primitiver est un quotient de polynômes tels que le degré du numérateur est strictement inférieur au degré du dénominateur, il faut

(1) décomposer la fonction en somme de fractions simples
  - factoriser le dénominateur au maximum.
  - écrire la fraction comme somme de fractions simples en utilisant aux dénominateurs toutes les possibilités données par la factorisation et en posant des inconnues aux numérateurs
  - utiliser la méthode des coefficients indéterminés pour trouver les valeurs des inconnues

(2) appliquer la formule de primitivation d'une combinaison linéaire

(3) appliquer la formule de primitivation d'une dérivée de composée.

Exemple.
Décomposons la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$ en somme de fractions simples.
On a

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2-1} &= \frac{1}{(x+1)(x-1)}\\ &= \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1}\end{aligned}$$

En réduisant es deux membres au même dénominateur, puis en les multipliant par le dénominateur commun, on trouve

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(x+1)(x-1)} = \frac{a(x-1)+b(x+1)}{(x+1)(x-1)}\\ \Leftrightarrow\ & 1 = a(x-1)+b(x+1)\\ \Leftrightarrow\ & 1 = ax - a + bx + b\\ \Leftrightarrow\ & 1 = (a+b)x + (b-a)\end{aligned}$$

Or, deux polynômes sont égaux lorsque les coefficients de leurs termes de même degré sont identiques. On obtient donc successivement

$$\begin{cases} a+b=0 \\ b-a=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-b \\ b-a=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-b \\ 2b=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-b \\ b=\frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{1}{2} \\ b=\frac{1}{2}\end{cases}$$

Ainsi, on a finalement

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{-\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1}$$

Dès lors, primitiver f revient à primitiver la somme précédente et on a

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{-\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x-1| + k
\end{aligned}$$

2.8 Exercices

(1) Vérifie que $F(x) = \ln|x^2 + x - 3|$ est une primitive de $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x-3}$.

(2) Détermine la primitive de la fonction définie par $f(x) = 5x - 3$ qui s'annule en 2.

(3) Calcule les primitives quasi-immédiates suivantes :

Série 1

(a) $\displaystyle\int x^7 \,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2} \,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int \sqrt{x} \,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int 5 \sin(x) \,\mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int 12x^7 + 4 \,\mathrm{d}x$

(f) $\displaystyle\int (2x-3)^5 \,\mathrm{d}x$

(g) $\displaystyle\int (x^2 - 7x + 2)\,.\,(x+1) \,\mathrm{d}x$

(h) $\displaystyle\int e^{2x-1} \,\mathrm{d}x$

(i) $\displaystyle\int \frac{3x^2}{x^3+1} \,\mathrm{d}x$

(j) $\displaystyle\int \frac{2x-3}{x^2-3x+4} \,\mathrm{d}x$

(k) $\displaystyle\int (x-1)(2x^2-4x+1)^2 \,\mathrm{d}x$

(l) $\displaystyle\int \frac{3x^2}{(x^3-1)^4} \,\mathrm{d}x$

Série 2

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int 8\,.\,3^x \,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int -15 \,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int x^2 - 7x + 2 \,\mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int (3x-1)\,.\,(1-x) \,\mathrm{d}x$

(f) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3} \,\mathrm{d}x$

(g) $\displaystyle\int \cos(2x+1) \,\mathrm{d}x$

(h) $\displaystyle\int e^{5x} \,\mathrm{d}x$

(i) $\displaystyle\int \frac{7}{7x-1} \,\mathrm{d}x$

(j) $\displaystyle\int 10x\,.\,\sin(5x^2) \,\mathrm{d}x$

(k) $\displaystyle\int 3x^2(x^3-1)^8 \,\mathrm{d}x$

(l) $\displaystyle\int \frac{2x}{\cos^2(x^2-1)} \,\mathrm{d}x$

Série 3

(a) $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^2} \,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int \frac{x^3+4x^2-x+5}{x-3} \,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int 2x^4 \,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int 5 - 3\sqrt{x} \,\mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int 456789 \,\mathrm{d}x$

(f) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{x} \,\mathrm{d}x$

(g) $\displaystyle\int \sin(3x-1) \,\mathrm{d}x$

(h) $\displaystyle\int 3\,e^{3x-2} \,\mathrm{d}x$

(i) $\displaystyle\int \frac{e^{\mathrm{tg}(x)}}{\cos^2(x)} \,\mathrm{d}x$

(j) $\displaystyle\int \frac{x}{(3x^2-5)^2} \,\mathrm{d}x$

(k) $\displaystyle\int \frac{2}{\cos^2(4x)} \,\mathrm{d}x$

(l) $\displaystyle\int \frac{1}{e^x} - 2 \,\mathrm{d}x$

(4) Calcule les primitives suivantes par substitution ou changement de variable :

(a) $\displaystyle\int x \,.\, \sqrt{x-1}\ \mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int \frac{2x-3}{\sqrt{x^2-3x+4}}\ \mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int x^2(x-3)^5\ \mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+6x}}\ \mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\ \mathrm{d}x$

(f) $\displaystyle\int \frac{x-1}{\sqrt{4x^2-8x+1}}\ \mathrm{d}x$

(g) $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^3+2}\ \mathrm{d}x$

(h) $\displaystyle\int \frac{3x}{(5x+3)^2}\ \mathrm{d}x$

(i) $\displaystyle\int \frac{1}{(5-2x)^3}\ \mathrm{d}x$

(j) $\displaystyle\int (1+x)\sqrt{2x+3}\ \mathrm{d}x$

(k) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{5x-2}}\ \mathrm{d}x$

(l) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt[4]{3+4x}}\ \mathrm{d}x$

(m) $\displaystyle\int x(2x+1)^6\ \mathrm{d}x$

(n) $\displaystyle\int \mathrm{tg}(x)\ \mathrm{d}x$

(5) Calcule les primitives suivantes en utilisant la méthode de primitivation par parties.

(a) $\displaystyle\int x\sin(x)\ \mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int (x^2-3)\ln(x)\ \mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int x\sqrt{1+2x}\ \mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int 2x\,e^x\ \mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int x\ln(x)\ \mathrm{d}x$

(f) $\displaystyle\int (x-2)\cos(x)\ \mathrm{d}x$

(g) $\displaystyle\int e^x\cos(x)\ \mathrm{d}x$

(h) $\displaystyle\int \ln(x)\ \mathrm{d}x$

(i) $\displaystyle\int (2+x)\,e^x\ \mathrm{d}x$

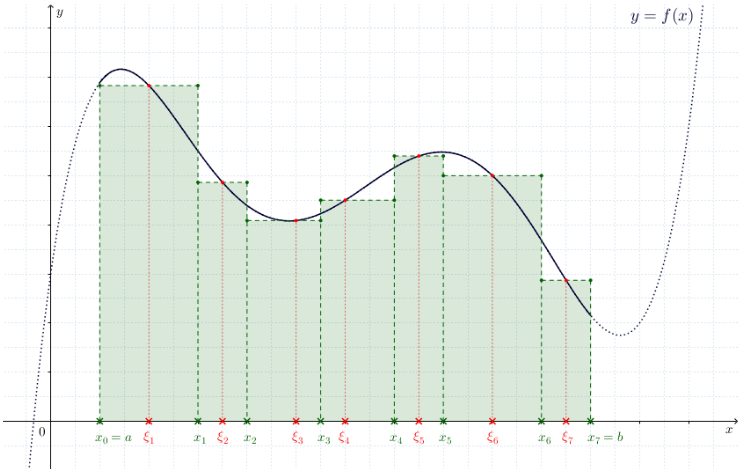
(j) $\displaystyle\int \ln(x)\sin(x)\ \mathrm{d}x$

3 Intégrales définies

3.1 Définition et théorème fondamental

On peut généraliser le procédé de l'activité 2(3) comme suit :

Soit une fonction f définie, positive et continue sur un intervalle réel $[a\,;b]$.



D'abord, on subdivise l'intervalle $[a\,;b]$ en n sous-intervalles consécutifs

$$[x_0\,;x_1],\ [x_1\,;x_2],\ [x_2\,;x_3],\ \ldots[x_{n-1}\,;x_n]$$

où on pose $x_0 = a$ et $x_n = b$, et, dans chaque sous-intervalles $[x_{i-1}\,;x_i]$ (avec $i \in \{1,\ldots,n\}$), on choisit un nombre réel ξ_i quelconque.

On peut alors construire n rectangles consécutifs de base $x_i - x_{i-1}$ et de hauteur $f(\xi_i)$ dont l'aire vaut

$$(x_i - x_{i-1}).f(\xi_i)$$

La somme des aires des n rectangles est donc donnée par

$$S_n = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}).f(\xi_i)$$

En augmentant indéfiniment le nombre de sous-intervalles (càd lorsque $n \to +\infty$), la somme des aires S_n tend vers une limite finie, à savoir la valeur de l'aire recherchée, et ne dépend

— ni du choix des extrémités des sous-intervalles,
— ni du choix du réel sélectionné dans chacun des sous-intervalles.

Cette limite est appelée **intégrale définie de a à b de la fonction f** et est notée

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

La définition précédente peut être généralisée à toutes les fonctions définies et continues sur un intervalle fermé.

Remarques.

(a) Le symbole « $\int$ », introduit par Leibniz (un mathématicien allemand de la deuxième moitié du 17e siècle), rappelle l'initiale « S » de somme et « dx » fait référence aux distance $(x_i - x_{i-1})$ qui apparaissent dans les termes de la somme des aires des n rectangles.

(b) La variable x est muette. Cela signifie qu'on peut écrire indifféremment

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\ \mathrm{d}u = \cdots$$

(c) L'intégrale définie de a à b de la fonction f représente une aire uniquement lorsque f est positive sur l'intervalle $[a\,;b]$.

Théorème fondamental de l'analyse

Le théorème fondamental de l'analyse établit que la dérivation et l'intégration sont des « opérations réciproques ». Il est divisé en deux énoncés.

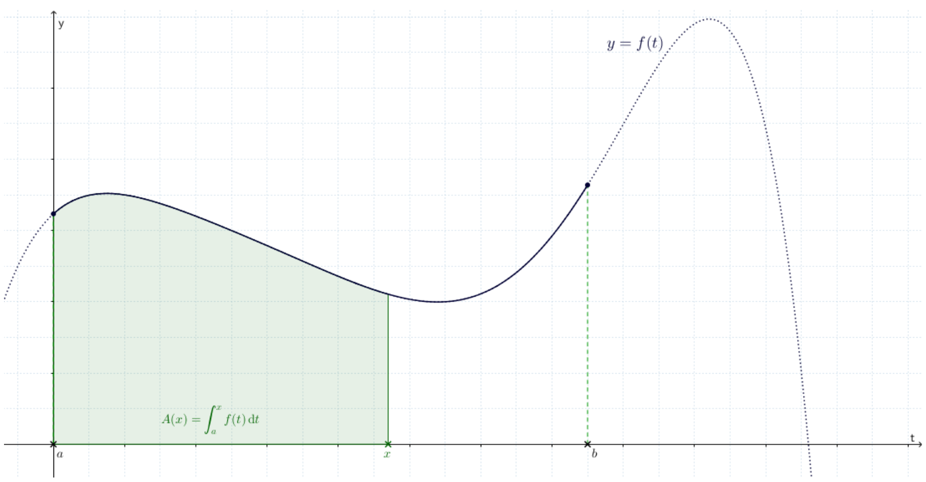
Théorème (Partie 1 : Existence d'une primitive).
Si f une fonction continue sur un intervalle réel $[a\,;b]$, alors la fonction

$$A : [a\,;b] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Ce premier théorème peut s'interpréter de la manière suivante.

Soit f une fonction définie, continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$ réel. La fonction A qui apparait dans l'énoncé du théorème est alors la fonction qui, à tout réel x de l'intervalle $[a\,;b]$, associe l'aire de la surface délimitée par l'axe horizontal $\mathcal{O}_t$, la courbe $y = f(t)$, la droite verticale d'équation $t = a$ et la droite verticale d'équation $t = x$.



Le premier théorème affirme que pour tout réel x de l'intervalle $[a\,;b]$, la dérivée de la fonction « aire » A correspond à la fonction f, dont le graphique délimite la surface considérée.

Le deuxième théorème fait le lien entre intégration et primitivation. Il montre en effet que connaitre une primitive d'une fonction permet de déterminer son intégrale. De plus, il permet de calculer facilement les intégrales de fonctions définies et continues sur un intervalle de fermé.

Théorème (Partie 2 : Lien entre primitive et intégrale).
Soit f une fonction continue sur un intervalle réel $[a\,;b]$. Alors, on a

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive de f.

Démonstration.
Vu le théorème d'existence, on sait que la fonction définie par

$$A(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est l'unique primitive de f qui s'annule en a. On sait également que toutes les primitives de f sont égales à une constante additive près. Soit F une telle primitive. Il existe donc $k \in \mathbb{R}$ tel que

$$A(x) = F(x) + k$$

En évaluant cette égalité en a, on trouve

$$A(a) = F(a) + k \iff 0 = F(a) + k \iff k = -F(a)$$

Dès lors,

$$A(x) = F(x) + k \iff \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F(a)$$

En évaluant cette dernière égalité en b, on obtiens finalement

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

D'où la conclusion vu que la variable d'intégration est muette. ■

Remarque.
Si G est une autre primitive de f, on sait qu'il existe une constante k telle que $G = F + k$. Dès lors,

$$\begin{aligned} G(b) - G(a) &= (F(b) + k) - (F(a) + k) \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

Cela signifie que le membre de droite de l'égalité qui apparait dans le deuxième théorème est indépendante de la primitive choisie.

Notation.
On pose
$$[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Exemples.
Reprenons les exemples 1 et 2 de calcul d'aire proposés lors de l'activité 2.

(a) Si $f(x) = 5$, $a = 1$ et $b = 3$, alors f est positive sur $[1\,;\,3]$ et on a donc
$$\int_1^3 5 \, \mathrm{d}x = [5x]_1^3 = 5\,.\,3 - 5\,.\,1 = 15 - 5 = 10.$$

(b) Si $f(x) = 2x - 1$, $a = 1$ et $b = 3$, alors f est positive sur $[1\,;\,3]$ et on a donc
$$\int_1^3 2x - 1 \, \mathrm{d}x = \left[x^2 - x\right]_1^3 = \left(3^2 - 3\right) - \left(1^2 - 1\right) = 6 - 0 = 6.$$

3.2 Propriétés

Propriété.
Pour toute fonction f continue sur un intervalle $[a\,;\,b]$, on a

(1) $\displaystyle\int_a^a f(x) \, \mathrm{d}x = 0$

(2) $\displaystyle\int_b^a f(x) \, \mathrm{d}x = -\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$

(3) $f \geq 0 \;\Rightarrow\; \displaystyle\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \geq 0$

(4) $f \leq 0 \;\Rightarrow\; \displaystyle\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \leq 0$

Exemples.

(a) On a
$$\int_1^1 x \, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{1^2}{2} = 0$$

(b) Les nombres
$$\int_1^0 2\,e^{2x} \, \mathrm{d}x = \left[e^{2x}\right]_1^0 = e^{2\,.\,0} - e^{2\,.\,1} = e^2 - 1$$
et
$$\int_0^1 2\,e^{2x} \, \mathrm{d}x = \left[e^{2x}\right]_0^1 = e^{2\,.\,1} - e^{2\,.\,0} = 1 - e^2$$
sont opposés.

(c) La fonction $x \mapsto x^2$ est strictement positive sur l'intervalle $[1\,;\,2]$ et on a
$$\int_1^2 x^2 \, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3} > 0$$

(d) La fonction $x \mapsto -x$ est strictement négative sur l'intervalle $[4\,;\,7]$ et on a

$$\int_4^7 -x \; \mathrm{d}x = \left[\frac{-x^2}{2}\right]_4^7 = \frac{-7^2}{2} - \frac{-4^2}{2} = -\frac{33}{2} > 0$$

Propriété (Combinaison linéaire).
Pour toutes fonctions f et g continues sur un intervalle $[a\,;\,b]$ et tous réel k, ℓ, on a

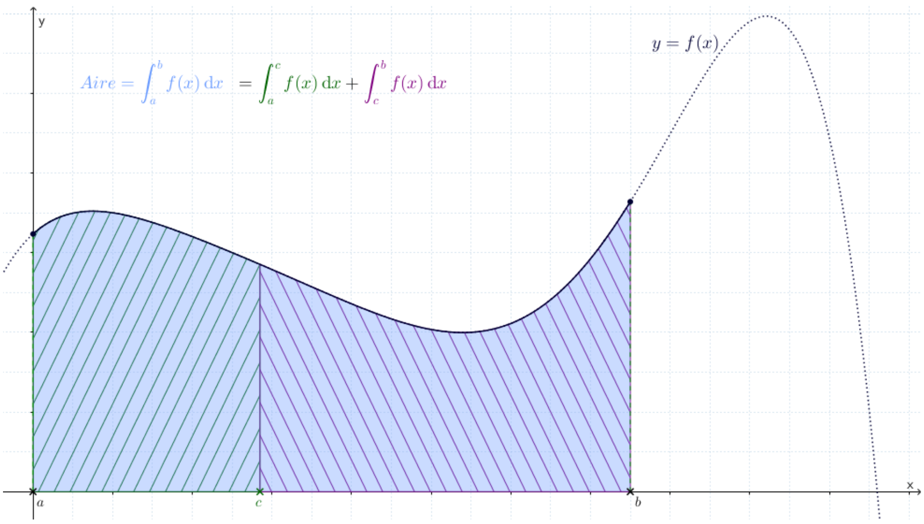
$$\int_a^b k\,.\,f(x) + \ell\,.\,g(x) \; \mathrm{d}x = k\,.\int_a^b f(x) \; \mathrm{d}x + \ell\,.\int_a^b g(x) \; \mathrm{d}x\,.$$

Exemple.
On a

$$\begin{aligned}\int_{-1}^3 2x^2 - \frac{3}{x} \; \mathrm{d}x &= 2\int_{-1}^3 x^2 \; \mathrm{d}x - 3\int_{-1}^3 \frac{1}{x} \; \mathrm{d}x \\ &= 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^3 - 3\,[\ln|x|]_{-1}^3 \\ &= 2\left(\frac{3^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3}\right) - 3\,(\ln|3| - \ln|-1|) \\ &= 2\,\frac{28}{3} - 3\,\ln(3) \\ &= \frac{56}{3} - 3\,\ln(3)\end{aligned}$$

Propriété (Linéarité).
Pour toute fonction f continue sur un intervalle $[a\,;\,b]$ et tout $c \in [a\,;\,b]$, on a

$$\int_a^b f(x) \; \mathrm{d}x = \int_a^c f(x) \; \mathrm{d}x + \int_c^b f(x) \; \mathrm{d}x\,.$$



Propriété (Substitution).
Pour toutes fonctions f et g continues sur un intervalle $[a\,;b]$, on a

$$\int_a^b f\left(g(x)\right).g'(x)\ \mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,\mathrm{d}t$$

en posant $t = g(x)$.

Exemple.
On veut calculer $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x\left(1+\ln(x)\right)^2}\ \mathrm{d}x$.

On pose

$$t = 1+\ln(x)$$
$$\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

Les bornes de l'intégrale deviennent alors

$$x = 1 \Rightarrow\ t = 1+\ln(1) = 1$$
$$x = e \Rightarrow\ t = 1+\ln(e) = 2$$

Finalement, on obtient successivement

$$\int_1^e \frac{1}{x\left(1+\ln(x)\right)^2}\ \mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_1^2 t^{-2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{-1}}{-1}\right]_1^2 = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^2 = -\frac{1}{2}+\frac{1}{1} = \frac{1}{2}$$

Propriété (Changement de variable).
Pour toutes fonction f continue sur un intervalle $[a\,;b]$, on a

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f\left(g(t)\right).g'(t)\,\mathrm{d}t$$

en posant $x = g(t)$.

Exemple.
On veut calculer $\displaystyle\int_1^3 x\sqrt{x-1}\ \mathrm{d}x$.

On pose

$$t = x-1$$
$$x = t+1$$
$$\mathrm{d}x = 1\,\mathrm{d}x$$

Les bornes de l'intégrale deviennent alors

$$x = 1 \Rightarrow \; t = 3 - 1 = 2$$
$$x = 3 \Rightarrow \; t = 3 - 3 = 0$$

Finalement, on obtient successivement

$$\begin{aligned}
\int_1^3 x\sqrt{x-1}\,\mathrm{d}x &= \int_2^0 (t-1)\sqrt{t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_2^0 (t-1)t^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_2^0 t^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_2^0 \\
&= \left[\frac{2}{5}\sqrt{t^5} - \frac{2}{3}\sqrt{t^3}\right]_2^0 \\
&= \left(\frac{2}{5}\sqrt{2^5} - \frac{2}{3}\sqrt{2^3}\right) - \left(\frac{2}{5}\sqrt{0^5} - \frac{2}{3}\sqrt{0^3}\right) \\
&= \frac{4\sqrt{2}}{15}
\end{aligned}$$

Propriété (Intégration par parties).
Pour toutes fonctions f et g continues sur un intervalle $[a\,;b]$, on a

$$\int_a^b f'(x)\,.\,g(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)\,.\,g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)\,.\,g'(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Exemple.
On veut calculer $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} x\,.\cos(x)\,\mathrm{d}x\,.$

On pose

$$\begin{aligned}
f(x) = x \quad &; \quad f'(x) = 1 \\
g'(x) = \cos(x) \quad &; \quad g(x) = \sin(x)
\end{aligned}$$

La formule de primitivation par parties donne alors

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} x\,.\cos(x)\,\mathrm{d}x &= [x\,.\sin(x)]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} 1\,.\sin(x)\,\mathrm{d}x \\
&= [x\,.\sin(x)]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} - [-\cos(x)]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \\
&= [x\,.\sin(x) + \cos(x)]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \\
&= (\pi\,.\sin(\pi) + \cos(\pi)) - \left(\frac{\pi}{4}\,.\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \\
&\approx -3,777
\end{aligned}$$

3.3 Exercices

Calcule les intégrales définies suivantes :

(1) $\displaystyle\int_3^5 7x\ \mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int_1^3 3-2x\ \mathrm{d}x$

(3) $\displaystyle\int_{-4}^1 1+2x\ \mathrm{d}x$

(4) $\displaystyle\int_0^2 x(2-x)\ \mathrm{d}x$

(5) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2+2}{x^2}\ \mathrm{d}x$

(6) $\displaystyle\int_{-1}^1 2x^3-x+1\ \mathrm{d}x$

(7) $\displaystyle\int_0^1 (1-x)^2\ \mathrm{d}x$

(8) $\displaystyle\int_0^1 e^{2x}\ \mathrm{d}x$

(9) $\displaystyle\int_{0,1}^1 x\sqrt{x}\ \mathrm{d}x$

(10) $\displaystyle\int_4^2 x\sqrt{x^2+4}\ \mathrm{d}x$

(11) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2(x)\,.\,\sin(x)\ \mathrm{d}x$

(12) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x$

(13) $\displaystyle\int_1^3 \frac{x-1}{x}\ \mathrm{d}x$

(14) $\displaystyle\int_1^2 4x^2-7x+3\ \mathrm{d}x$

(15) $\displaystyle\int_0^{16} \sqrt{x}\ \mathrm{d}x$

(16) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} 2\sin(x)\ \mathrm{d}x$

(17) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)+2\sin(x)\ \mathrm{d}x$

(18) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln^2(x)}{x}\ \mathrm{d}x$

(19) $\displaystyle\int_{-1}^2 x^2-3x\ \mathrm{d}x$

(20) $\displaystyle\int_{0,5}^2 x^3-3x^2+x-5\ \mathrm{d}x$

(21) $\displaystyle\int_0^2 \left(x^2+3\right)^2\ \mathrm{d}x$

(22) $\displaystyle\int_{\ln(2)}^{\ln(3)} \frac{e^x}{e^x-1}\ \mathrm{d}x$

(23) $\displaystyle\int_1^2 x-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\ \mathrm{d}x$

(24) $\displaystyle\int_{-1}^1 3\,.\,5^x\ \mathrm{d}x$

(25) $\displaystyle\int_1^3 e^x+1\ \mathrm{d}x$

(26) $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} 3+e^x\ \mathrm{d}x$

(27) $\displaystyle\int_{-1}^2 2x\sqrt{4-x}\ \mathrm{d}x$

(28) $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^e (2x-1)\ln(x)\ \mathrm{d}x$

Formulaire : dérivées

Les opérations sur les dérivées sont

Somme / Différence : $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

Produit : $(f(x) \,.\, g(x))' = f'(x) \,.\, g(x) + f(x) \,.\, g'(x)$

Produit par un réel : $(k \,.\, f(x))' = k \,.\, f'(x)$

Quotient : $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x) \,.\, g(x) - f(x) \,.\, g'(x)}{g(x)^2}$

Composition : $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \,.\, g'(x)$

Pour tout $n \in \mathbb{Q}$ et tout $k \in \mathbb{R}$, on a

Fonction	**Dérivée (simple)**	**Dérivée (composée)**
Constante	$k' = 0$	
Identité	$x' = 1$	
Puissance	$(x^n)' = n\, x^{n-1}$	$(f(x)^n)' = n\, f(x)^{n-1} \,.\, f'(x)$
Inverse	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$
Racine carrée	$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
Exponentielle népérienne	$(e^x)' = e^x$	$\left(e^{f(x)}\right)' = e^{f(x)} \,.\, f'(x)$
Exponentielle de base a	$(a^x)' = a^x \ln(a)$	$\left(a^{f(x)}\right)' = a^{f(x)} \ln(a) \,.\, f'(x)$
Logarithme népérien	$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$	$(\ln(f(x)))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$
Logarithme de base a	$(\log_a(x))' = \frac{1}{x \ln(a)}$	$(\log_a(f(x)))' = \frac{f'(x)}{f(x) \ln(a)}$
Cosinus	$(\cos(x))' = -\sin(x)$	$(\cos(f(x)))' = -\sin(f(x)) \,.\, f'(x)$
Sinus	$(\sin(x))' = \cos(x)$	$(\sin(f(x)))' = \cos(f(x)) \,.\, f'(x)$
Tangente	$(\mathrm{tg}(x))' = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \mathrm{tg}^2(x)$	$(\mathrm{tg}(f(x)))' = \dfrac{f'(x)}{\cos^2(f(x))} = (1 + \mathrm{tg}^2(f(x))) \,.\, f'(x)$
Cotangente	$(\mathrm{cotg}(x))' = -\dfrac{1}{\sin^2(x)} = 1 - \mathrm{cotg}^2(x)$	$(\mathrm{cotg}(f(x)))' = -\dfrac{f'(x)}{\sin^2(f(x))} = (1 - \mathrm{cotg}^2(f(x))) \,.\, f'(x)$

Formulaire : primitives

Pour tout $n \in \mathbb{Q}$, on a

Fonction	**Primitive**
Zéro	$\int 0 \; \mathrm{d}x = k$
Identité	$\int 1 \; \mathrm{d}x = x + k$
Puissance	$\int x^n \; \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$ (avec $n \neq -1$)
Inverse	$\int \frac{1}{x} \; \mathrm{d}x = \ln\|x\| + k$
Exponentielle népérienne	$\int e^x \; \mathrm{d}x = e^x + k$
Exponentielle de base a	$\int a^x \; \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln(a)} + k$
Sinus	$\int \sin(x) \; \mathrm{d}x = -\cos(x) + k$
Cosinus	$\int \cos(x) \; \mathrm{d}x = \sin(x) + k$
	$\int \frac{1}{\cos^2(x)} \; \mathrm{d}x = \mathrm{tg}(x) + k$
	$\int \frac{1}{\sin^2(x)} \; \mathrm{d}x = -\mathrm{cotg}(x) + k$

Les méthodes de primitivation non immédiates sont :

Combinaison linéaire : $\int a \,.\, f(x) + b \,.\, g(x) \; \mathrm{d}x = a \int f(x) \; \mathrm{d}x + b \int g(x) \; \mathrm{d}x$

Composée : $\int h'(g(x)) \,.\, g'(x) \; \mathrm{d}x = h(g(x)) + k$

Substitution : $\int f(g(x)) \,.\, g'(x) \; \mathrm{d}x = \int f(t) \, \mathrm{d}t$

avec $t = g(x)$

Changement de variable : $\int f(x) \; \mathrm{d}x = \int f(g(t)) \,.\, g'(t) \; \mathrm{d}t$

avec $x = g(t)$

Par parties : $\int f(x).\, g'(x) \; \mathrm{d}x = f(x).\, g(x) - \int f'(x).\, g(x) \; \mathrm{d}x$

Fonction rationnelle : $\int \frac{N(x)}{D(x)} \; \mathrm{d}x = \int \frac{a_1}{P_1(x)} + \cdots + \frac{a_n}{P_n(x)} \; \mathrm{d}x$

si $\deg(N) < \deg(D)$