UAA 3 – Intégrale

Ch 1 – Calcul intégral

Mme Delleur

AR Agri – Saint-Georges

Sommaire

Activité 1

Lien avec la dérivation

Soit la fonction

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + x^2 + \frac{6}{5}x + 1$$

ses transformées

$$f_1(x) = f(x) - 2,7$$

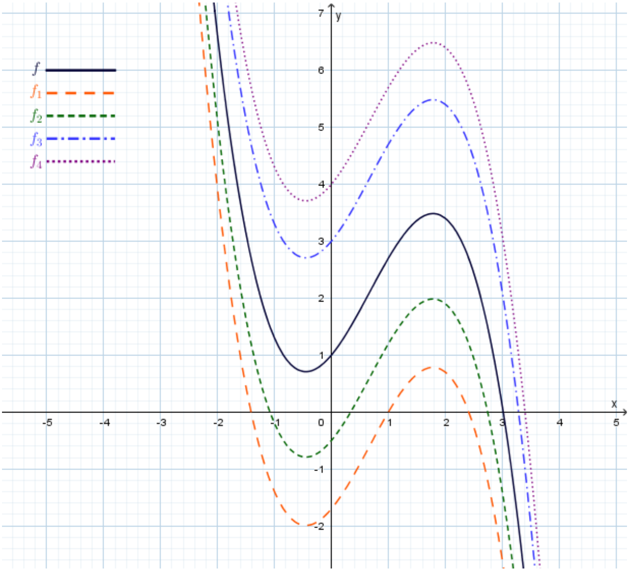
$$f_2(x) = f(x) - \frac{3}{2}$$

$$f_3(x) = f(x) + 2$$

$$f_4(x) = f(x) + 3$$

et leurs graphiques :

Activité 1



Activité 1

(a) Que remarques-tu ?

Activité 1

(a) Que remarques-tu ?

- Chaque courbe est obtenue par translation verticale de la courbe de référence.
- Toutes les courbes présentent les mêmes variations.

Activité 1

(a) Que remarques-tu ?

- Chaque courbe est obtenue par translation verticale de la courbe de référence.
- Toutes les courbes présentent les mêmes variations.

(b) Quel « outil » vu en 5e année permet d'étudier la variation d'une fonction ?

Activité 1

(a) Que remarques-tu ?

- Chaque courbe est obtenue par translation verticale de la courbe de référence.
- Toutes les courbes présentent les mêmes variations.

(b) Quel « outil » vu en 5^e année permet d'étudier la variation d'une fonction ?

La dérivation.

Activité 1

(a) Que remarques-tu ?
- Chaque courbe est obtenue par translation verticale de la courbe de référence.
- Toutes les courbes présentent les mêmes variations.

(b) Quel « outil » vu en 5^e année permet d'étudier la variation d'une fonction ?
La dérivation.

(c) En observant les courbes représentées plus haut, que peux-tu dire des dérivées des cinq fonctions mentionnées ?

Activité 1

(a) Que remarques-tu ?
- Chaque courbe est obtenue par translation verticale de la courbe de référence.
- Toutes les courbes présentent les mêmes variations.

(b) Quel « outil » vu en 5^{e} année permet d'étudier la variation d'une fonction ?
La dérivation.

(c) En observant les courbes représentées plus haut, que peux-tu dire des dérivées des cinq fonctions mentionnées ?
Elles sont égales.

Activité 1

(a) Que remarques-tu ?

- Chaque courbe est obtenue par translation verticale de la courbe de référence.
- Toutes les courbes présentent les mêmes variations.

(b) Quel « outil » vu en 5^{e} année permet d'étudier la variation d'une fonction ?
La dérivation.

(c) En observant les courbes représentées plus haut, que peux-tu dire des dérivées des cinq fonctions mentionnées ?
Elles sont égales.

Conclusion : Deux fonctions égales à une constante additive près possèdent la même dérivée.

Activité 1

Soit la fonction définie par

$$f(x) = 7x^6$$

(a) Donne les expressions de cinq fonctions qui ont f pour dérivée.

Activité 1

Soit la fonction définie par

$$f(x) = 7x^6$$

(a) Donne les expressions de cinq fonctions qui ont f pour dérivée.

$$F(x) = x^7 \quad ; \quad F(x) = x^7 + 1 \quad ; \quad F(x) = x^7 - 2$$
$$F(x) = x^7 + 3 \quad ; \quad F(x) = x^7 - 4$$

Activité 1

Soit la fonction définie par

$$f(x) = 7x^6$$

(a) Donne les expressions de cinq fonctions qui ont f pour dérivée.

$$F(x) = x^7 \quad ; \quad F(x) = x^7 + 1 \quad ; \quad F(x) = x^7 - 2$$
$$F(x) = x^7 + 3 \quad ; \quad F(x) = x^7 - 4$$

(b) Compare ces cinq fonctions. Que constates-tu ?

Activité 1

Soit la fonction définie par

$$f(x) = 7x^6$$

(a) Donne les expressions de cinq fonctions qui ont f pour dérivée.

$$F(x) = x^7 \quad ; \quad F(x) = x^7 + 1 \quad ; \quad F(x) = x^7 - 2$$
$$F(x) = x^7 + 3 \quad ; \quad F(x) = x^7 - 4$$

(b) Compare ces cinq fonctions. Que constates-tu ?

Elles sont égales à une constante additive près.

Activité 1

Soit la fonction définie par

$$f(x) = 7x^6$$

(a) Donne les expressions de cinq fonctions qui ont f pour dérivée.

$$F(x) = x^7 \quad ; \quad F(x) = x^7 + 1 \quad ; \quad F(x) = x^7 - 2$$
$$F(x) = x^7 + 3 \quad ; \quad F(x) = x^7 - 4$$

(b) Compare ces cinq fonctions. Que constates-tu ?

Elles sont égales à une constante additive près.

(c) Écris l'expression générale des fonctions F dont la dérivée est f.

Activité 1

Soit la fonction définie par

$$f(x) = 7x^6$$

(a) Donne les expressions de cinq fonctions qui ont f pour dérivée.

$$F(x) = x^7 \quad ; \quad F(x) = x^7 + 1 \quad ; \quad F(x) = x^7 - 2$$
$$F(x) = x^7 + 3 \quad ; \quad F(x) = x^7 - 4$$

(b) Compare ces cinq fonctions. Que constates-tu ?

Elles sont égales à une constante additive près.

(c) Écris l'expression générale des fonctions F dont la dérivée est f.

$$F(x) = x^7 + k \quad (\text{avec } k \in \mathbb{R})$$

Activité 1

Conclusion : Il existe une infinité de fonctions qui possèdent la même dérivée ; elles sont toutes égales à une constante additive près.

Activité 1

Conclusion : Il existe une infinité de fonctions qui possèdent la même dérivée ; elles sont toutes égales à une constante additive près.

(d) Détermine la primitive de f qui s'annule en 1.

Activité 1

Conclusion : Il existe une infinité de fonctions qui possèdent la même dérivée ; elles sont toutes égales à une constante additive près.

(d) Détermine la primitive de f qui s'annule en 1.
On sait que les primitives de f sont de la forme

$$F(x) = x^7 + k \quad (\text{avec } k \in \mathbb{R})$$

Activité 1

Conclusion : Il existe une infinité de fonctions qui possèdent la même dérivée ; elles sont toutes égales à une constante additive près.

(d) Détermine la primitive de f qui s'annule en 1.
On sait que les primitives de f sont de la forme

$$F(x) = x^7 + k \quad (\text{avec } k \in \mathbb{R})$$

Si cette primitive s'annule en 1, on a alors

$$F(1) = 0$$

Activité 1

Conclusion : Il existe une infinité de fonctions qui possèdent la même dérivée ; elles sont toutes égales à une constante additive près.

(d) Détermine la primitive de f qui s'annule en 1.

On sait que les primitives de f sont de la forme

$$F(x) = x^7 + k \quad (\text{avec } k \in \mathbb{R})$$

Si cette primitive s'annule en 1, on a alors

$$F(1) = 0 \;\Leftrightarrow\; 1^7 + k = 0$$

Activité 1

<u>**Conclusion :**</u> Il existe une infinité de fonctions qui possèdent la même dérivée ; elles sont toutes égales à une constante additive près.

(d) Détermine la primitive de f qui s'annule en 1.

On sait que les primitives de f sont de la forme

$$F(x) = x^7 + k \quad (\text{avec } k \in \mathbb{R})$$

Si cette primitive s'annule en 1, on a alors

$$F(1) = 0 \;\Leftrightarrow\; 1^7 + k = 0 \;\Leftrightarrow\; 1 + k = 0$$

Activité 1

<u>Conclusion :</u> Il existe une infinité de fonctions qui possèdent la même dérivée ; elles sont toutes égales à une constante additive près.

(d) Détermine la primitive de f qui s'annule en 1.

On sait que les primitives de f sont de la forme

$$F(x) = x^7 + k \quad (\text{avec } k \in \mathbb{R})$$

Si cette primitive s'annule en 1, on a alors

$$F(1) = 0 \;\Leftrightarrow\; 1^7 + k = 0 \;\Leftrightarrow\; 1 + k = 0 \;\Leftrightarrow\; k = -1$$

Activité 1

Conclusion : Il existe une infinité de fonctions qui possèdent la même dérivée ; elles sont toutes égales à une constante additive près.

(d) Détermine la primitive de f qui s'annule en 1.
On sait que les primitives de f sont de la forme

$$F(x) = x^7 + k \quad (\text{avec } k \in \mathbb{R})$$

Si cette primitive s'annule en 1, on a alors

$$F(1) = 0 \;\Leftrightarrow\; 1^7 + k = 0 \;\Leftrightarrow\; 1 + k = 0 \;\Leftrightarrow\; k = -1$$

Conclusion : $F(x) = x^7 - 1$

Activité 2

Aire sous une courbe

Pour calculer l'aire d'une partie du plan, les mathématiciens grecs utilisaient des méthodes géométriques consistant à transformer la partie donnée en un ou plusieurs polygones dont les aires sont plus faciles à calculer.

Formule d'aire du rectangle :

Activité 2

Aire sous une courbe

Pour calculer l'aire d'une partie du plan, les mathématiciens grecs utilisaient des méthodes géométriques consistant à transformer la partie donnée en un ou plusieurs polygones dont les aires sont plus faciles à calculer.

Formule d'aire du rectangle :

$$\text{Longueur} \cdot \text{largeur}$$

Activité 2

Aire sous une courbe

Pour calculer l'aire d'une partie du plan, les mathématiciens grecs utilisaient des méthodes géométriques consistant à transformer la partie donnée en un ou plusieurs polygones dont les aires sont plus faciles à calculer.

Formule d'aire du rectangle :

$$\text{Longueur} \cdot \text{largeur}$$

Formule d'aire du trapèze :

Activité 2

Aire sous une courbe

Pour calculer l'aire d'une partie du plan, les mathématiciens grecs utilisaient des méthodes géométriques consistant à transformer la partie donnée en un ou plusieurs polygones dont les aires sont plus faciles à calculer.

Formule d'aire du rectangle :

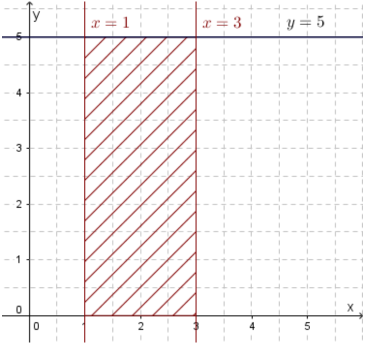
$$\text{Longueur} \cdot \text{largeur}$$

Formule d'aire du trapèze :

$$\frac{(\text{petite base} + \text{Grande Base}) \cdot \text{hauteur}}{2}$$

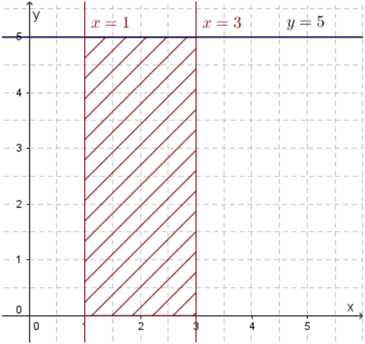
Activité 2

Calcule les aires hachurées :



Activité 2

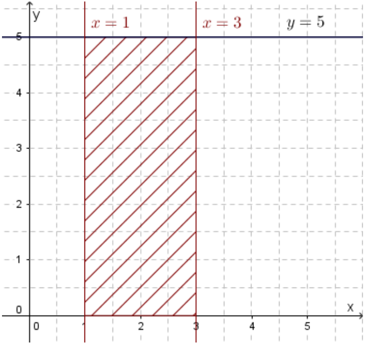
Calcule les aires hachurées :

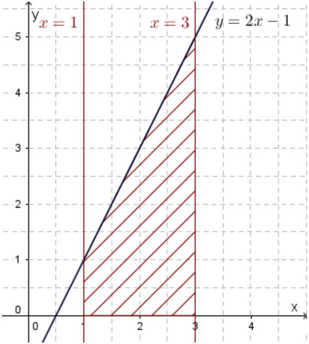


$Aire = 2 \cdot 5 = 10$

Activité 2

Calcule les aires hachurées :

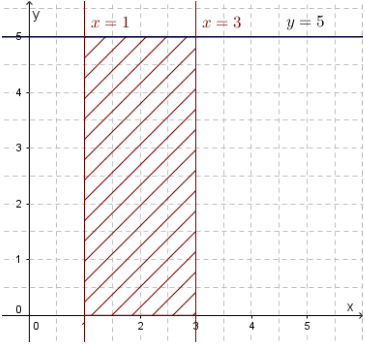




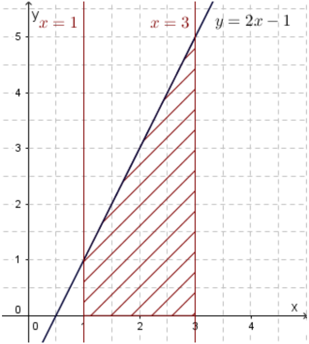
$Aire = 2 \cdot 5 = 10$

Activité 2

Calcule les aires hachurées :

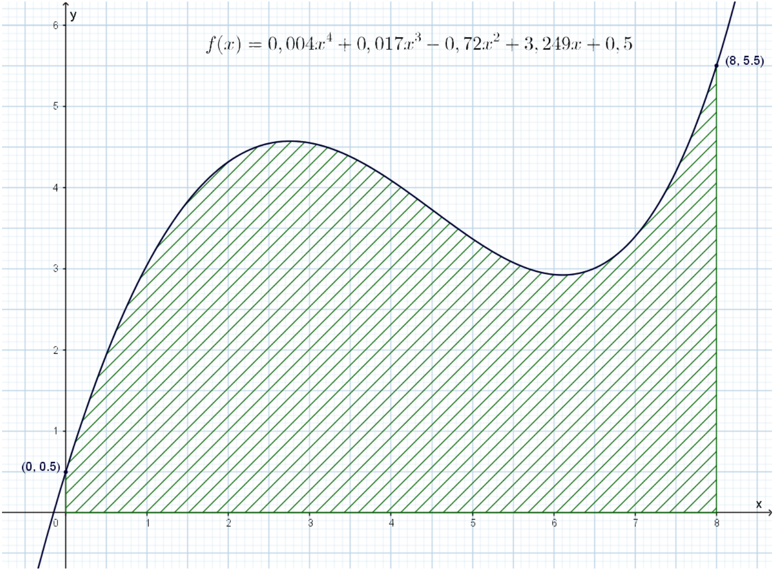


$Aire = 2 \cdot 5 = 10$



$$Aire = \frac{(1+5) \cdot 2}{2} = 6$$

Activité 2



Activité 2

L'exercice est plus compliqué que les deux premiers calculs d'aire.

$\rightarrow$ Approximation avec la méthode des mathématiciens grecs.

$\rightarrow$ Polygones choisis : des rectangles.

$\rightarrow$ Outil : GeoGebra

https://www.geogebra.org/m/rznpbfpq

Activité 2

L'exercice est plus compliqué que les deux premiers calculs d'aire.

→ Approximation avec la méthode des mathématiciens grecs.

→ Polygones choisis : des rectangles.

→ Outil : GeoGebra

`https://www.geogebra.org/m/rznpbfpq`

Que constates-tu lorsque le nombre de rectangles augmente ?

Activité 2

L'exercice est plus compliqué que les deux premiers calculs d'aire.

- $\rightarrow$ Approximation avec la méthode des mathématiciens grecs.
- $\rightarrow$ Polygones choisis : des rectangles.
- $\rightarrow$ Outil : GeoGebra

  `https://www.geogebra.org/m/rznpbfpq`

Que constates-tu lorsque le nombre de rectangles augmente ?
Lorsque le nombre de rectangles augmente, la valeur totale des aires des rectangles se rapproche de l'aire exacte sous la courbe.

Activité 3

Vitesse et déplacement

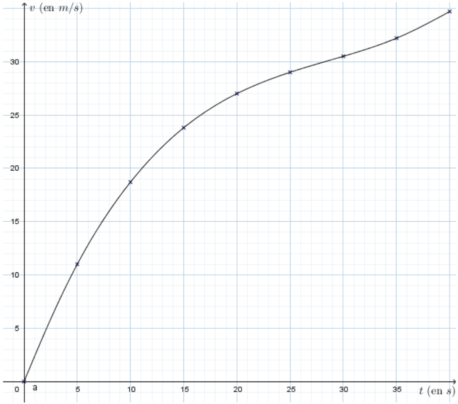
Lors du salon de l'auto, Philippe a pu tester un nouveau véhicule.

Le vendeur a relevé sa vitesse toutes les cinq secondes et les valeurs obtenues ont été portées dans le tableau ci- dessous :

t (en s)	0	5	10	15	20	25	30	35	40
v (en m/s)	0	11	18,7	23,8	27	29	30,5	32,2	34,7

Activité 3

Graphique d'une fonction qui modélise l'évolution de la vitesse au cours de ces 40 secondes :



But : Estimer la distance totale parcourue.

Activité 3

(1) Complète le tableau suivant :

Intervalle de temps (en s)	Vitesse sur l'intervalle (en m/s)		Distance parcourue (en m)	
	min	max	min	max
$[0\,;5]$	0	11	$5 \cdot 0 = 0$	$5 \cdot 11 = 55$
$[5\,;10]$				
$[10\,;15]$				
$[15\,;20]$				
$[20\,;25]$				
$[25\,;30]$				
$[30\,;35]$				
$[35\,;40]$				

Activité 3

(1) Complète le tableau suivant :

Intervalle de temps (en s)	Vitesse sur l'intervalle (en m/s)		Distance parcourue (en m)	
	min	max	min	max
$[0\,;5]$	0	11	$5 \cdot 0 = 0$	$5 \cdot 11 = 55$
$[5\,;10]$	11	18,7	$5 \cdot 11 = 55$	$5 \cdot 18{,}7 = 93{,}5$
$[10\,;15]$				
$[15\,;20]$				
$[20\,;25]$				
$[25\,;30]$				
$[30\,;35]$				
$[35\,;40]$				

Activité 3

(1) Complète le tableau suivant :

Intervalle de temps (en s)	Vitesse sur l'intervalle (en m/s)		Distance parcourue (en m)	
	min	max	min	max
$[0\,;5]$	0	11	$5 \cdot 0 = 0$	$5 \cdot 11 = 55$
$[5\,;10]$	11	18,7	$5 \cdot 11 = 55$	$5 \cdot 18{,}7 = 93{,}5$
$[10\,;15]$	18,7	23,8	$5 \cdot 18{,}7 = 93{,}5$	$5 \cdot 23{,}8 = 119$
$[15\,;20]$				
$[20\,;25]$				
$[25\,;30]$				
$[30\,;35]$				
$[35\,;40]$				

Activité 3

(1) Complète le tableau suivant :

Intervalle de temps (en s)	Vitesse sur l'intervalle (en m/s)		Distance parcourue (en m)	
	min	max	min	max
[0 ; 5]	0	11	$5 \cdot 0 = 0$	$5 \cdot 11 = 55$
[5 ; 10]	11	18,7	$5 \cdot 11 = 55$	$5 \cdot 18{,}7 = 93{,}5$
[10 ; 15]	18,7	23,8	$5 \cdot 18{,}7 = 93{,}5$	$5 \cdot 23{,}8 = 119$
[15 ; 20]	23,8	27	$5 \cdot 23{,}8 = 119$	$5 \cdot 27 = 135$
[20 ; 25]				
[25 ; 30]				
[30 ; 35]				
[35 ; 40]				

Activité 3

(1) Complète le tableau suivant :

Intervalle de temps (en s)	Vitesse sur l'intervalle (en m/s)		Distance parcourue (en m)	
	min	max	min	max
$[0\,;5]$	0	11	$5 \cdot 0 = 0$	$5 \cdot 11 = 55$
$[5\,;10]$	11	18,7	$5 \cdot 11 = 55$	$5 \cdot 18{,}7 = 93{,}5$
$[10\,;15]$	18,7	23,8	$5 \cdot 18{,}7 = 93{,}5$	$5 \cdot 23{,}8 = 119$
$[15\,;20]$	23,8	27	$5 \cdot 23{,}8 = 119$	$5 \cdot 27 = 135$
$[20\,;25]$	27	29	$5 \cdot 27 = 135$	$5 \cdot 29 = 145$
$[25\,;30]$				
$[30\,;35]$				
$[35\,;40]$				

Activité 3

(1) Complète le tableau suivant :

Intervalle de temps (en s)	Vitesse sur l'intervalle (en m/s)		Distance parcourue (en m)	
	min	max	min	max
[0 ; 5]	0	11	$5 \cdot 0 = 0$	$5 \cdot 11 = 55$
[5 ; 10]	11	18,7	$5 \cdot 11 = 55$	$5 \cdot 18{,}7 = 93{,}5$
[10 ; 15]	18,7	23,8	$5 \cdot 18{,}7 = 93{,}5$	$5 \cdot 23{,}8 = 119$
[15 ; 20]	23,8	27	$5 \cdot 23{,}8 = 119$	$5 \cdot 27 = 135$
[20 ; 25]	27	29	$5 \cdot 27 = 135$	$5 \cdot 29 = 145$
[25 ; 30]	29	30,5	$5 \cdot 29 = 145$	$5 \cdot 30{,}5 = 152{,}5$
[30 ; 35]				
[35 ; 40]				

Activité 3

(1) Complète le tableau suivant :

Intervalle de temps (en s)	Vitesse sur l'intervalle (en m/s)		Distance parcourue (en m)	
	min	max	min	max
[0 ; 5]	0	11	$5 \cdot 0 = 0$	$5 \cdot 11 = 55$
[5 ; 10]	11	18,7	$5 \cdot 11 = 55$	$5 \cdot 18{,}7 = 93{,}5$
[10 ; 15]	18,7	23,8	$5 \cdot 18{,}7 = 93{,}5$	$5 \cdot 23{,}8 = 119$
[15 ; 20]	23,8	27	$5 \cdot 23{,}8 = 119$	$5 \cdot 27 = 135$
[20 ; 25]	27	29	$5 \cdot 27 = 135$	$5 \cdot 29 = 145$
[25 ; 30]	29	30,5	$5 \cdot 29 = 145$	$5 \cdot 30{,}5 = 152{,}5$
[30 ; 35]	30,5	32,2	$5 \cdot 30{,}5 = 152{,}5$	$5 \cdot 32{,}2 = 161$
[35 ; 40]				

Activité 3

(1) Complète le tableau suivant :

Intervalle de temps (en s)	Vitesse sur l'intervalle (en m/s)		Distance parcourue (en m)	
	min	max	min	max
$[0\,;5]$	0	11	$5 \cdot 0 = 0$	$5 \cdot 11 = 55$
$[5\,;10]$	11	18,7	$5 \cdot 11 = 55$	$5 \cdot 18{,}7 = 93{,}5$
$[10\,;15]$	18,7	23,8	$5 \cdot 18{,}7 = 93{,}5$	$5 \cdot 23{,}8 = 119$
$[15\,;20]$	23,8	27	$5 \cdot 23{,}8 = 119$	$5 \cdot 27 = 135$
$[20\,;25]$	27	29	$5 \cdot 27 = 135$	$5 \cdot 29 = 145$
$[25\,;30]$	29	30,5	$5 \cdot 29 = 145$	$5 \cdot 30{,}5 = 152{,}5$
$[30\,;35]$	30,5	32,2	$5 \cdot 30{,}5 = 152{,}5$	$5 \cdot 32{,}2 = 161$
$[35\,;40]$	32,2	34,7	$5 \cdot 32{,}2 = 161$	$5 \cdot 34{,}7 = 173{,}5$

Activité 3

(2) Donne un encadrement de la distance totale parcourue pendant ces quarante secondes.

Activité 3

(2) Donne un encadrement de la distance totale parcourue pendant ces quarante secondes.

- Distance totale minimale :

Activité 3

(2) Donne un encadrement de la distance totale parcourue pendant ces quarante secondes.

- Distance totale minimale :

  $0 + 55 + 93,5 + 119 + 135 + 145 + 152,5 + 161 = 861\,\text{m}$

Activité 3

(2) Donne un encadrement de la distance totale parcourue pendant ces quarante secondes.

- Distance totale minimale :

  $0 + 55 + 93,5 + 119 + 135 + 145 + 152,5 + 161 = 861\,\text{m}$

- Distance totale maximale :

Activité 3

(2) Donne un encadrement de la distance totale parcourue pendant ces quarante secondes.

- Distance totale minimale :

  $0 + 55 + 93,5 + 119 + 135 + 145 + 152,5 + 161 = 861\,\mathrm{m}$

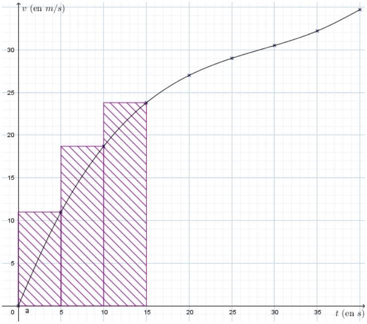
- Distance totale maximale :

  $55 + 93,5 + 119 + 135 + 145 + 152,5 + 161 + 173,5 = 1034,5\,\mathrm{m}$

Activité 3

(3) Complète les graphiques ci-dessous pour qu'ils correspondent aux valeurs reprises dans les deux dernières colonnes du tableau précédent.

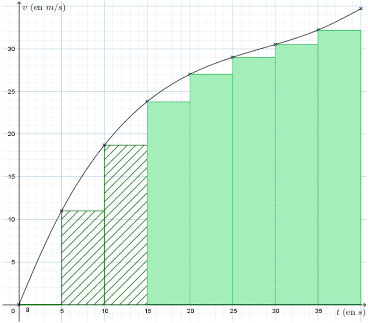
Somme inférieure de Darboux



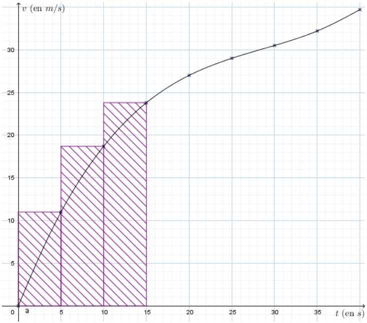
Somme supérieure de Darboux

Activité 3

(3) Complète les graphiques ci-dessous pour qu'ils correspondent aux valeurs reprises dans les deux dernières colonnes du tableau précédent.



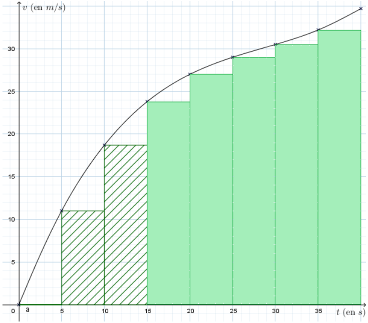
Somme inférieure de Darboux



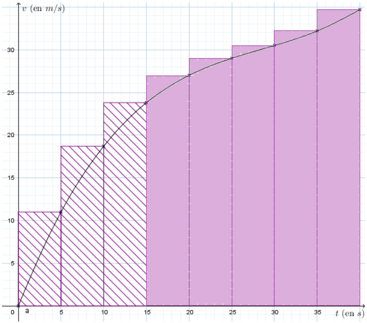
Somme supérieure de Darboux

Activité 3

(3) Complète les graphiques ci-dessous pour qu'ils correspondent aux valeurs reprises dans les deux dernières colonnes du tableau précédent.



Somme inférieure de Darboux



Somme supérieure de Darboux

Activité 3

(4) Comment peut-on représenter la distance parcourue pendant les quarante secondes de l'observation sur le graphique de l'évolution de la vitesse ?

Activité 3

(4) Comment peut-on représenter la distance parcourue pendant les quarante secondes de l'observation sur le graphique de l'évolution de la vitesse ?

C'est l'aire de la surface délimitée par la courbe $v(t)$, l'axe horizontal, l'axe vertical et la droite verticale d'équation $x = 40$

Activité 3

(4) Comment peut-on représenter la distance parcourue pendant les quarante secondes de l'observation sur le graphique de l'évolution de la vitesse ?

C'est l'aire de la surface délimitée par la courbe $v(t)$, l'axe horizontal, l'axe vertical et la droite verticale d'équation $x = 40$

(5) Comment pourrait-on améliorer la précision de notre encadrement ?

Activité 3

(4) Comment peut-on représenter la distance parcourue pendant les quarante secondes de l'observation sur le graphique de l'évolution de la vitesse ?

C'est l'aire de la surface délimitée par la courbe $v(t)$, l'axe horizontal, l'axe vertical et la droite verticale d'équation $x = 40$

(5) Comment pourrait-on améliorer la précision de notre encadrement ?

En augmentant le nombre d'intervalles, donc en diminuant la largeur de leurs bases

Sommaire

Définition.

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On appelle **primitive de f sur I** toute fonction F qui vérifie

$$F'(x) = f(x)$$

pour tout réel $x \in I$.

Définition.

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On appelle **primitive de f sur I** toute fonction F qui vérifie

$$F'(x) = f(x)$$

pour tout réel $x \in I$.

Autrement dit, F est **une** primitive de f si et seulement si f est **la** dérivée de F.

Définition.

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On appelle **primitive de f sur I** toute fonction F qui vérifie

$$F'(x) = f(x)$$

pour tout réel $x \in I$.

Autrement dit, F est **une** primitive de f si et seulement si f est **la** dérivée de F.

Propriété.

Si F est une primitive de la fonction f, alors l'ensemble des primitives de f est l'ensemble des fonctions de la forme $F + k$ où k est un réel.

Notation.
L'ensemble de toutes les primitives d'une fonction f est noté

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

Notation.
L'ensemble de toutes les primitives d'une fonction f est noté

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

Exemple.

La fonction

$$F(x) = x^3$$

est **une** primitive de la fonction

$$f(x) = 3x^2$$

car $(x^3)' = 3x^2$

Donc, **l'ensemble de toutes** les primitives de $3x^2$ est

$$\int 3x^2\,\mathrm{d}x = x^3 + k$$

Primitive immédiates – Formules

Définition.

On appelle **primitive immédiate** (ou **primitive élémentaire**) toute primitive qui découle des formules de dérivation de base.

Fonction	Dérivée
k	
$x + k$	
$x^2 + k$	
$x^3 + k$	
$x^n + k$	

Fonction	Primitive
0	
1	
x	
x^2	
x^n	

Primitive immédiates – Formules

Définition.

On appelle **primitive immédiate** (ou **primitive élémentaire**) toute primitive qui découle des formules de dérivation de base.

Fonction	Dérivée
k	0
$x+k$	1
x^2+k	$2x$
x^3+k	$3x^2$
x^n+k	nx^{n-1}

Fonction	Primitive
0	k
1	$x+k$
x	$\frac{x^2}{2}+k$
x^2	$\frac{x^3}{3}+k$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+k$

Primitive immédiates – Formules

Fonction	Dérivée
$\ln(x)$	
e^x	
a^x	
$\cos(x)$	
$\sin(x)$	
$\text{tg}(x)$	
$\text{cotg}(x)$	

Fonction	Primitive
$\frac{1}{x}$	
e^x	
a^x	
$\sin(x)$	
$\cos(x)$	
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	
$\frac{1}{\sin^2(x)}$	

Primitive immédiates – Formules

Fonction	Dérivée
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \cdot \ln(a)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\mathrm{tg}(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
$\mathrm{cotg}(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$

Fonction	Primitive
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
e^x	e^x
a^x	$\frac{a^x}{\ln(a)}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\mathrm{tg}(x)$
$\frac{1}{\sin^2(x)}$	$-\mathrm{cotg}(x)$

Combinaison linéaire

Propriété.

Pour toutes fonctions f et g et tous réels a et b, on a

$$\int a \,.\, f(x) + b \,.\, g(x) \;\mathrm{d}x \;= a \,.\int f(x) \;\mathrm{d}x \;+ b \,.\int g(x) \;\mathrm{d}x$$

Combinaison linéaire

Propriété.

Pour toutes fonctions f et g et tous réels a et b, on a

$$\int a\,.\,f(x)+b\,.\,g(x)\;\mathrm{d}x \;=a\,.\int f(x)\;\mathrm{d}x\;+b\,.\int g(x)\;\mathrm{d}x$$

Démonstration.

Si F et G sont des primitives respectives des fonctions f et g, alors

$$\begin{aligned}\left(a\,.\int f(x)\;\mathrm{d}x\;+b\,.\int g(x)\;\mathrm{d}x\;\right)' &= (a\,.\,(F(x)+k)+b\,.\,(G(x)+k))'\\ &= a\,.\,(F(x)+k)'+b\,.\,(G(x)+k)'\\ &= a\,.\,f(x)+b\,.\,g(x)\end{aligned}$$

■

Combinaison linéaire

Exemple.

On a

$$\int 2\cos(x) - 3x^5 \, \mathrm{d}x \quad =$$

Combinaison linéaire

Exemple.

On a

$$\int 2\cos(x) - 3x^5 \,\mathrm{d}x \quad = \quad 2\,.\int \cos(x)\,\mathrm{d}x - 3\,.\int x^5\,\mathrm{d}x$$

Combinaison linéaire

Exemple.

On a

$$\begin{aligned}\int 2\cos(x) - 3x^5 \, \mathrm{d}x &= 2 \, . \int \cos(x) \, \mathrm{d}x - 3 \, . \int x^5 \, \mathrm{d}x \\ &= 2\sin(x) - 3 \, . \, \frac{x^6}{6} + k\end{aligned}$$

Combinaison linéaire

Exemple.

On a

$$\begin{aligned}\int 2\cos(x) - 3x^5 \, \mathrm{d}x &= 2\,.\int \cos(x)\,\mathrm{d}x - 3\,.\int x^5\,\mathrm{d}x \\ &= 2\sin(x) - 3\,.\,\frac{x^6}{6} + k \\ &= 2\sin(x) - \frac{1}{2}x^6 + k\end{aligned}$$

Dérivée d'une composée

Propriété.

Pour toutes fonctions f et g, on a

$$\int f'\left(g(x)\right) . g'(x) \, \mathrm{d}x = f\left(g(x)\right) + k$$

Exemple.

On a

$$\int \frac{5}{\cos^2(5x-2)} \, \mathrm{d}x = \operatorname{tg}(5x-2) + k$$

car

$$(5x-2)' = 5 \quad \text{et} \quad (\operatorname{tg}(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Dérivée d'une composée

Exemple.

On a

$$\begin{aligned}\int x\,.\,(7x^2+6)^3\ \mathrm{d}x &= \frac{1}{14}\int 14x\,.\,(7x^2+6)^3\ \mathrm{d}x\\ &= \frac{(7x^2+6)^4}{4}+k\end{aligned}$$

car

$$(7x^2+6)' = 14x \quad \text{et} \quad \left(\frac{x^4}{4}\right)' = x^3$$

Produit de polynôme

Pour calculer

$$\int P_1(x) \cdot P_2(x) \, \mathrm{d}x$$

où P_1 et P_2 sont deux polynômes, il faut

1. effectuer le produit
2. ordonner et réduire le polynôme
3. appliquer la formule de primitivation d'une combinaison linéaire.

Produit de polynôme

Exemple.

On a

$$\int (2x-7)\,.\,(3x^3+4x^2-x+5)\ \mathrm{d}x$$

Produit de polynôme

Exemple.

On a

$$\int (2x-7)\,.\,(3x^3+4x^2-x+5)\;\mathrm{d}x$$
$$= \int 6x^4+8x^3-2x^2+10x-21x^3-28x^2+7x-35\;\mathrm{d}x$$

Produit de polynôme

Exemple.

On a

$$\begin{aligned}\int (2x-7).(3x^3+4x^2-x+5)\,\mathrm{d}x \\ &= \int 6x^4+8x^3-2x^2+10x-21x^3-28x^2+7x-35\,\mathrm{d}x \\ &= \int 6x^4-13x^3-30x^2+17x-35\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Produit de polynôme

Exemple.

On a

$$\begin{aligned}
&\int (2x-7)\,.\,(3x^3+4x^2-x+5)\ \mathrm{d}x \\
&\qquad = \int 6x^4+8x^3-2x^2+10x-21x^3-28x^2+7x-35\ \mathrm{d}x \\
&\qquad = \int 6x^4-13x^3-30x^2+17x-35\ \mathrm{d}x \\
&\qquad = \frac{6x^5}{5}-\frac{13x^4}{4}-\frac{30x^3}{3}+\frac{17x^2}{2}-35x+k
\end{aligned}$$

Produit de polynôme

Exemple.

On a

$$\begin{aligned}
&\int (2x-7).(3x^3+4x^2-x+5)\ \mathrm{d}x \\
&\quad = \int 6x^4+8x^3-2x^2+10x-21x^3-28x^2+7x-35\ \mathrm{d}x \\
&\quad = \int 6x^4-13x^3-30x^2+17x-35\ \mathrm{d}x \\
&\quad = \frac{6x^5}{5}-\frac{13x^4}{4}-\frac{30x^3}{3}+\frac{17x^2}{2}-35x+k \\
&\quad = \frac{6}{5}x^5-\frac{13}{4}x^4-10x^3+\frac{17}{2}x^2-35x+k
\end{aligned}$$

Division euclidienne

Pour calculer

$$\int \frac{N(x)}{D(x)} \, \mathrm{d}x$$

où N et D sont deux polynômes tel que $\deg(N) \geq \deg(D)$, il faut

1. effectuer la division euclidienne
2. appliquer la formule de primitivation d'une combinaison linéaire
3. appliquer la formule de primitivation d'une dérivée de composée.

Division euclidienne

Exemple.

On veut calculer

$$\int \frac{4x^3 + 6x^2 + 2x - 1}{2x + 3}\,\mathrm{d}x$$

La division euclidienne donne

$$\begin{array}{ccccccc|c} 4x^3 & + & 6x^2 & + & 2x & - & 1 & 2x+3 \\ \cline{8-8} & & & & & & & \\ \end{array}$$

Division euclidienne

Exemple.

On veut calculer

$$\int \frac{4x^3 + 6x^2 + 2x - 1}{2x+3}\,\mathrm{d}x$$

La division euclidienne donne

$$\begin{array}{ccccccc|l} 4x^3 & + & 6x^2 & + & 2x & - & 1 & 2x+3 \\ \cline{8-8} & & & & & & & 2x^2 \end{array}$$

Division euclidienne

Exemple.

On veut calculer

$$\int \frac{4x^3 + 6x^2 + 2x - 1}{2x + 3}\, \mathrm{d}x$$

La division euclidienne donne

$$\begin{array}{rrrrrrrr|l} & 4x^3 & + & 6x^2 & + & 2x & - & 1 & 2x+3 \\ \cline{9-9} - & 4x^3 & + & 6x^2 & & & & & 2x^2 \\ \cline{2-8} \end{array}$$

Division euclidienne

Exemple.

On veut calculer

$$\int \frac{4x^3 + 6x^2 + 2x - 1}{2x + 3}\, \mathrm{d}x$$

La division euclidienne donne

$$\begin{array}{rrrrrrrr|l} & 4x^3 & + & 6x^2 & + & 2x & - & 1 & 2x+3 \\ \cline{9-9} - & 4x^3 & + & 6x^2 & & & & & 2x^2 \\ \cline{2-8} & & & & & 2x & - & 1 & \end{array}$$

Division euclidienne

Exemple.

On veut calculer

$$\int \frac{4x^3+6x^2+2x-1}{2x+3}\,\mathrm{d}x$$

La division euclidienne donne

$$\begin{array}{rrrrrrrr|l}
 & 4x^3 & + & 6x^2 & + & 2x & - & 1 & 2x+3 \\ \cline{9-9}
- & 4x^3 & + & 6x^2 & & & & & 2x^2+1 \\ \cline{2-8}
 & & & & & 2x & - & 1 &
\end{array}$$

Division euclidienne

Exemple.

On veut calculer

$$\int \frac{4x^3 + 6x^2 + 2x - 1}{2x + 3}\,\mathrm{d}x$$

La division euclidienne donne

$$\begin{array}{rrrrrrrr|l}
 & 4x^3 & + & 6x^2 & + & 2x & - & 1 & 2x + 3 \\ \cline{9-9}
- & 4x^3 & + & 6x^2 & & & & & 2x^2 + 1 \\ \cline{2-8}
 & & & & & 2x & - & 1 & \\
- & & & & & 2x & + & 3 & \\ \cline{2-8}
 & & & & & & & &
\end{array}$$

Division euclidienne

Exemple.

On veut calculer

$$\int \frac{4x^3 + 6x^2 + 2x - 1}{2x + 3}\,\mathrm{d}x$$

La division euclidienne donne

$$\begin{array}{rrrrrrrr|l}
 & 4x^3 & + & 6x^2 & + & 2x & - & 1 & 2x+3 \\ \cline{9-9}
- & 4x^3 & + & 6x^2 & & & & & 2x^2+1 \\ \cline{2-8}
 & & & & & 2x & - & 1 & \\
- & & & & & 2x & + & 3 & \\ \cline{2-8}
 & & & & & & & -4 &
\end{array}$$

Division euclidienne

Dès lors,

$$\frac{4x^3+6x^2+2x-1}{2x+3} = 2x^2+1+\frac{-4}{2x+3}$$

Division euclidienne

Dès lors,

$$\frac{4x^3+6x^2+2x-1}{2x+3} = 2x^2+1+\frac{-4}{2x+3}$$

Ainsi, on trouve finalement

$$\int \frac{4x^3+6x^2+2x-1}{2x+3}\,\mathrm{d}x$$

Division euclidienne

Dès lors,

$$\frac{4x^3+6x^2+2x-1}{2x+3} = 2x^2+1+\frac{-4}{2x+3}$$

Ainsi, on trouve finalement

$$\int \frac{4x^3+6x^2+2x-1}{2x+3}\,\mathrm{d}x \quad = \quad \int 2x^2+1+\frac{-4}{2x+3}\,\mathrm{d}x$$

Division euclidienne

Dès lors,

$$\frac{4x^3+6x^2+2x-1}{2x+3} = 2x^2+1+\frac{-4}{2x+3}$$

Ainsi, on trouve finalement

$$\begin{aligned}\int \frac{4x^3+6x^2+2x-1}{2x+3}\,\mathrm{d}x &= \int 2x^2+1+\frac{-4}{2x+3}\,\mathrm{d}x\\ &= \int 2x^2+1\,\mathrm{d}x \;-2\,.\int\frac{2}{2x+3}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Division euclidienne

Dès lors,

$$\frac{4x^3+6x^2+2x-1}{2x+3} = 2x^2+1+\frac{-4}{2x+3}$$

Ainsi, on trouve finalement

$$\begin{aligned}\int \frac{4x^3+6x^2+2x-1}{2x+3}\,\mathrm{d}x &= \int 2x^2+1+\frac{-4}{2x+3}\,\mathrm{d}x\\ &= \int 2x^2+1\,\mathrm{d}x \;-2\,.\int \frac{2}{2x+3}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{2}{3}x^3+x-2\,.\,\ln|2x+3|+k\end{aligned}$$

PPS

Propriété.

Pour toutes fonctions f et g, on a

$$\int f\left(g(x)\right) . g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(t)\,\mathrm{d}t$$

en posant $t = g(x)$.

PPS

Démonstration.

Si F est une primitive de f, alors

$$\left(\int f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = (F(t)+k)'$$

PPS

Démonstration.

Si F est une primitive de f, alors

$$\begin{aligned}\left(\int f(t)\,\mathrm{d}t\right)' &= (F(t)+k)' \\ &= (F(g(x))+k)'\end{aligned}$$

PPS

Démonstration.

Si F est une primitive de f, alors

$$\begin{aligned}\left(\int f(t)\,\mathrm{d}t\right)' &= (F(t)+k)' \\ &= (F\left(g(x)\right)+k)' \\ &= F'\left(g(x)\right).g'(x)+0\end{aligned}$$

PPS

Démonstration.

Si F est une primitive de f, alors

$$\begin{aligned}\left(\int f(t)\,\mathrm{d}t\right)' &= (F(t)+k)' \\ &= (F(g(x))+k)' \\ &= F'(g(x))\,.\,g'(x)+0 \\ &= f(g(x))\,.\,g'(x)\end{aligned}$$

$\blacksquare$

PPS

Exemple.

On veut calculer

$$\int (3x^2 - 8x + 5)\,.\,\sqrt{x^3 - 4x^2 + 5x - 1}\,\mathrm{d}x$$

PPS

Exemple.

On veut calculer

$$\int (3x^2 - 8x + 5) \, . \, \sqrt{x^3 - 4x^2 + 5x - 1} \, \mathrm{d}x$$

On pose

$$t = x^3 - 4x^2 + 5x - 1$$

PPS

Exemple.

On veut calculer

$$\int (3x^2 - 8x + 5) \,.\, \sqrt{x^3 - 4x^2 + 5x - 1}\, \mathrm{d}x$$

On pose

$$\begin{aligned} t &= x^3 - 4x^2 + 5x - 1 \\ \mathrm{d}t &= (3x^2 - 8x + 5)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

PPS

Donc

$$\int (3x^2 - 8x + 5)\,.\,\sqrt{x^3 - 4x^2 + 5x - 1}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int \sqrt{t}\,\mathrm{d}t$$

PPS

Donc

$$\int (3x^2 - 8x + 5)\,.\,\sqrt{x^3 - 4x^2 + 5x - 1}\;\mathrm{d}x$$
$$= \int \sqrt{t}\;\mathrm{d}t$$
$$= \int t^{1/2}\;\mathrm{d}t$$

PPS

Donc

$$\begin{aligned}\int (3x^2 - 8x + 5)\,.\,\sqrt{x^3 - 4x^2 + 5x - 1}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \sqrt{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int t^{1/2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}} + k\end{aligned}$$

PPS

Donc

$$\begin{aligned}
\int (3x^2 - 8x + 5) \,.\, \sqrt{x^3 - 4x^2 + 5x - 1}\;\mathrm{d}x
&= \int \sqrt{t}\;\mathrm{d}t \\
&= \int t^{1/2}\;\mathrm{d}t \\
&= \frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}} + k \\
&= \frac{2}{3}\sqrt{t^3} + k
\end{aligned}$$

PPS

Donc

$$
\begin{aligned}
\int (3x^2 - 8x + 5)\,.\,\sqrt{x^3 - 4x^2 + 5x - 1}\ \mathrm{d}x \\
&= \int \sqrt{t}\ \mathrm{d}t \\
&= \int t^{1/2}\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}} + k \\
&= \frac{2}{3}\sqrt{t^3} + k \\
&= \frac{2}{3}\sqrt{(x^3 - 4x^2 + 5x - 1)^3} + k
\end{aligned}
$$

PCV

Propriété.

Pour toutes fonction f, on a

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f\left(g(t)\right).g'(t)\,\mathrm{d}t$$

en posant $x = g(t)$.

PCV

Exemple.

On veut

$$\int \frac{x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$$

PCV

Exemple.

On veut

$$\int \frac{x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$$

On pose

$$t = x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \;=\; t - 1$$

PCV

Exemple.

On veut

$$\int \frac{x}{(x+1)^2}\, \mathrm{d}x$$

On pose

$$t = x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} x &= t - 1 \\ \mathrm{d}x &= \mathrm{d}t \end{aligned}$$

PCV

Donc

$$\int \frac{x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x \quad = \quad \int \frac{t-1}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

PCV

Donc

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{t-1}{t^2}\,\mathrm{d}t\\ &= \int \frac{t}{t^2} - \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

PCV

Donc

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{t-1}{t^2}\,\mathrm{d}t\\ &= \int \frac{t}{t^2} - \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t\\ &= \int \frac{1}{t} - t^{-2}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

PCV

Donc

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{t-1}{t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int \frac{t}{t^2} - \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int \frac{1}{t} - t^{-2}\,\mathrm{d}t \\
&= \ln|t| - \frac{t^{-1}}{-1} + k
\end{aligned}$$

PCV

Donc

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{t-1}{t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int \frac{t}{t^2} - \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int \frac{1}{t} - t^{-2}\,\mathrm{d}t \\
&= \ln|t| - \frac{t^{-1}}{-1} + k \\
&= \ln|t| + \frac{1}{t} + k
\end{aligned}$$

PCV

Donc

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{t-1}{t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int \frac{t}{t^2} - \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int \frac{1}{t} - t^{-2}\,\mathrm{d}t \\
&= \ln|t| - \frac{t^{-1}}{-1} + k \\
&= \ln|t| + \frac{1}{t} + k \\
&= \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + k
\end{aligned}$$

PPP

Propriété.

Pour toutes fonctions f et g, on a

$$\int f(x)\,.\,g'(x)\ \mathrm{d}x = f(x)\,.\,g(x) - \int f'(x)\,.\,g(x)\ \mathrm{d}x$$

PPP

Démonstration.

Vu la formule de dérivation d'un produit de deux fonctions, on a

$$(f(x) \, . \, g(x))' = f'(x) \, . \, g(x) + f(x) \, . \, g'(x)$$

PPP

Démonstration.

Vu la formule de dérivation d'un produit de deux fonctions, on a

$$(f(x) \,.\, g(x))' = f'(x) \,.\, g(x) + f(x) \,.\, g'(x)$$

Ainsi, en primitivant les deux membres de cette formule, on obtient

$$\int (f(x) \,.\, g(x))' \ \mathrm{d}x = \int f'(x) \,.\, g(x) + f(x) \,.\, g'(x) \ \mathrm{d}x$$

PPP

Démonstration.

Vu la formule de dérivation d'un produit de deux fonctions, on a

$$(f(x) \, . \, g(x))' = f'(x) \, . \, g(x) + f(x) \, . \, g'(x)$$

Ainsi, en primitivant les deux membres de cette formule, on obtient

$$\int (f(x) \, . \, g(x))' \ \mathrm{d}x = \int f'(x) \, . \, g(x) + f(x) \, . \, g'(x) \ \mathrm{d}x$$

ce qui peut se réécrire

$$f(x) \, . \, g(x) = \int f'(x) \, . \, g(x) \ \mathrm{d}x + \int f(x) \, . \, g'(x) \ \mathrm{d}x$$

PPP

Démonstration.

Vu la formule de dérivation d'un produit de deux fonctions, on a

$$(f(x)\,.\,g(x))' = f'(x)\,.\,g(x) + f(x)\,.\,g'(x)$$

Ainsi, en primitivant les deux membres de cette formule, on obtient

$$\int (f(x)\,.\,g(x))' \,\mathrm{d}x = \int f'(x)\,.\,g(x) + f(x)\,.\,g'(x)\,\mathrm{d}x$$

ce qui peut se réécrire

$$f(x)\,.\,g(x) = \int f'(x)\,.\,g(x)\,\mathrm{d}x + \int f(x)\,.\,g'(x)\,\mathrm{d}x$$

D'où la conclusion. ∎

PPP

Exemple.

On veut calculer

$$\int x \, . \, \cos(x) \, \mathrm{d}x$$

PPP

Exemple.

On veut calculer

$$\int x \,.\, \cos(x) \, \mathrm{d}x$$

On pose

$$f(x) = x$$

PPP

Exemple.

On veut calculer

$$\int x \,.\, \cos(x)\ \mathrm{d}x$$

On pose

$$f(x) = x \qquad ; \qquad f'(x) = 1$$

PPP

Exemple.

On veut calculer

$$\int x \,.\, \cos(x)\ \mathrm{d}x$$

On pose

$$f(x) = x \qquad ; \qquad f'(x) = 1$$
$$g'(x) = \cos(x)$$

PPP

Exemple.

On veut calculer

$$\int x \,.\, \cos(x)\ \mathrm{d}x$$

On pose

$$\begin{aligned} f(x) &= x \qquad ; \qquad f'(x) = 1 \\ g'(x) &= \cos(x) \qquad ; \qquad g(x) = \sin(x) \end{aligned}$$

PPP

Exemple.

On veut calculer

$$\int x \,.\, \cos(x)\ \mathrm{d}x$$

On pose

$$\begin{aligned} f(x) &= x \qquad ; \qquad f'(x) = 1 \\ g'(x) &= \cos(x) \qquad ; \qquad g(x) = \sin(x) \end{aligned}$$

PPP

Donc

$$\int x \,.\, \cos(x)\ \mathrm{d}x \quad = \quad x \,.\, \sin(x) - \int 1 \,.\, \sin(x)\ \mathrm{d}x$$

PPP

Donc

$$\begin{aligned}\int x \,.\, \cos(x)\,\mathrm{d}x &= x \,.\, \sin(x) - \int 1 \,.\, \sin(x)\,\mathrm{d}x \\ &= x \,.\, \sin(x) - \int \sin(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

PPP

Donc

$$\begin{aligned} \int x \, . \, \cos(x) \, \mathrm{d}x &= x \, . \, \sin(x) - \int 1 \, . \, \sin(x) \, \mathrm{d}x \\ &= x \, . \, \sin(x) - \int \sin(x) \, \mathrm{d}x \\ &= x \, . \, \sin(x) - (-\cos(x)) + k \end{aligned}$$

PPP

Donc

$$\begin{aligned}\int x \,.\, \cos(x)\ \mathrm{d}x &= x \,.\, \sin(x) - \int 1 \,.\, \sin(x)\ \mathrm{d}x \\ &= x \,.\, \sin(x) - \int \sin(x)\ \mathrm{d}x \\ &= x \,.\, \sin(x) - (-\cos(x)) + k \\ &= x \,.\, \sin(x) + \cos(x) + k\end{aligned}$$

Exercices Pages 19 & 20 du cours.

Bon travail !

Sommaire

Rappel – Approximation de l'aire sous une courbe

Depuis l'activité 2, on sait

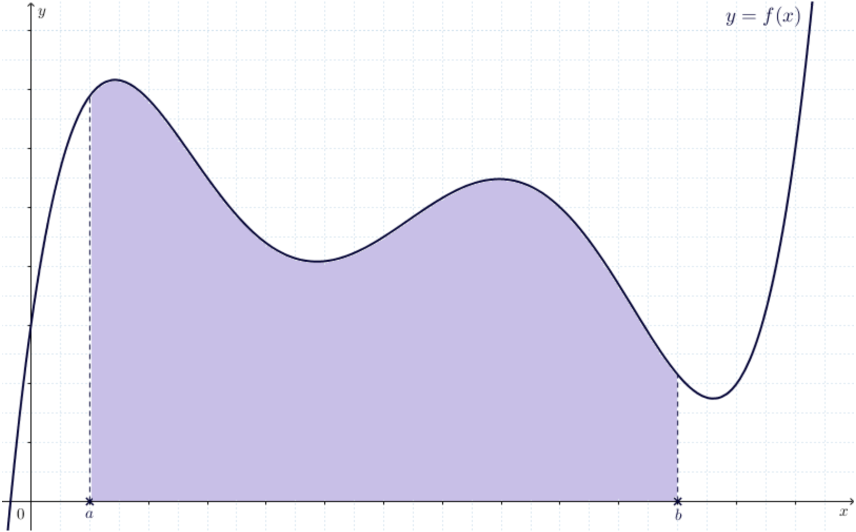
- qu'il est possible d'approximer l'aire sous une courbe en calculant une somme d'aires de polygones
- que la précision de l'approximation augmente avec le nombre de polygones utilisés

Exemple.

Méthodes des rectangles & des trapèzes avec GeoGebra

https://www.geogebra.org/m/nsz27nfx

Formalisation



Formalisation

Méthode de construction des rectangles :

1. Subdiviser l'intervalle $[a\,;\,b]$ en n sous-intervalles consécutifs

$$[x_0\,;\,x_1]\,,\ [x_1\,;\,x_2]\,,\ [x_2\,;\,x_3]\,,\ \ldots [x_{n-1}\,;\,x_n]$$

Formalisation

Méthode de construction des rectangles :

1. Subdiviser l'intervalle $[a\,;\,b]$ en n sous-intervalles consécutifs

$$[x_0\,;\,x_1]\,,\;[x_1\,;\,x_2]\,,\;[x_2\,;\,x_3]\,,\;\ldots[x_{n-1}\,;\,x_n]$$

2. Dans chaque sous-intervalle $[x_{i-1}\,;\,x_i]$, choisir une réel ξ_i.

Formalisation

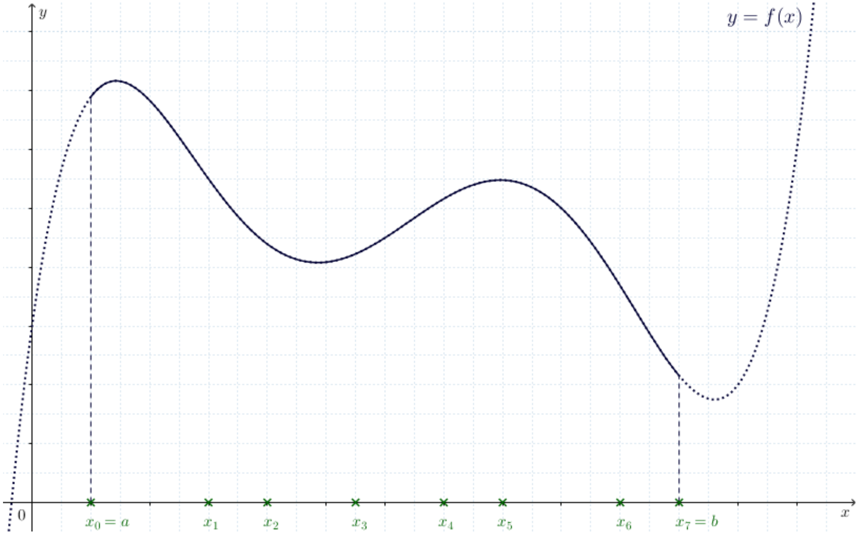
Méthode de construction des rectangles :

1. Subdiviser l'intervalle $[a\,;\,b]$ en n sous-intervalles consécutifs

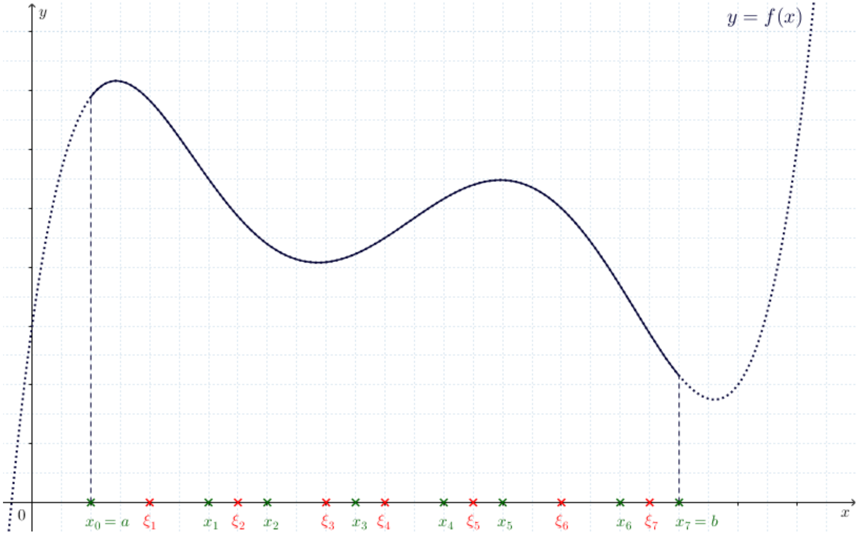
$$[x_0\,;\,x_1]\,,\ [x_1\,;\,x_2]\,,\ [x_2\,;\,x_3]\,,\ \ldots [x_{n-1}\,;\,x_n]$$

2. Dans chaque sous-intervalle $[x_{i-1}\,;\,x_i]$, choisir une réel ξ_i.
3. Construire n rectangles consécutifs de base $x_i - x_{i-1}$ et de hauteur $f(\xi_i)$.

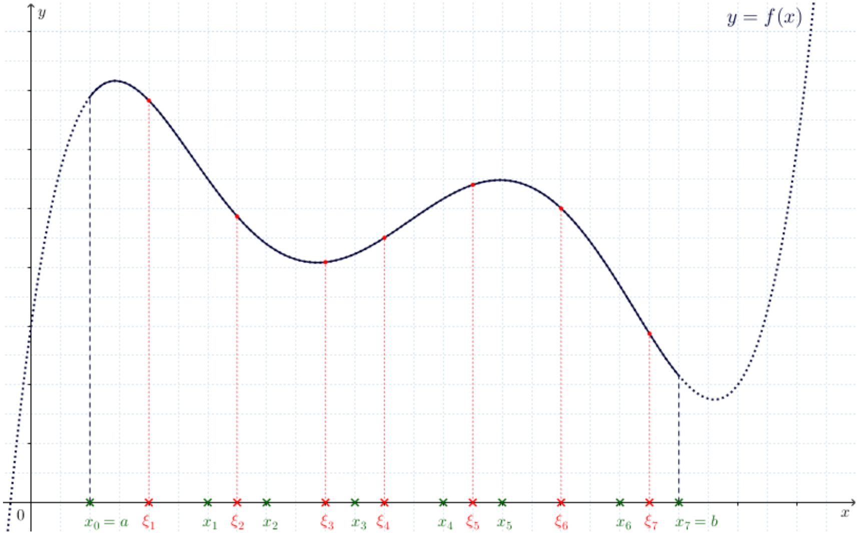
Formalisation



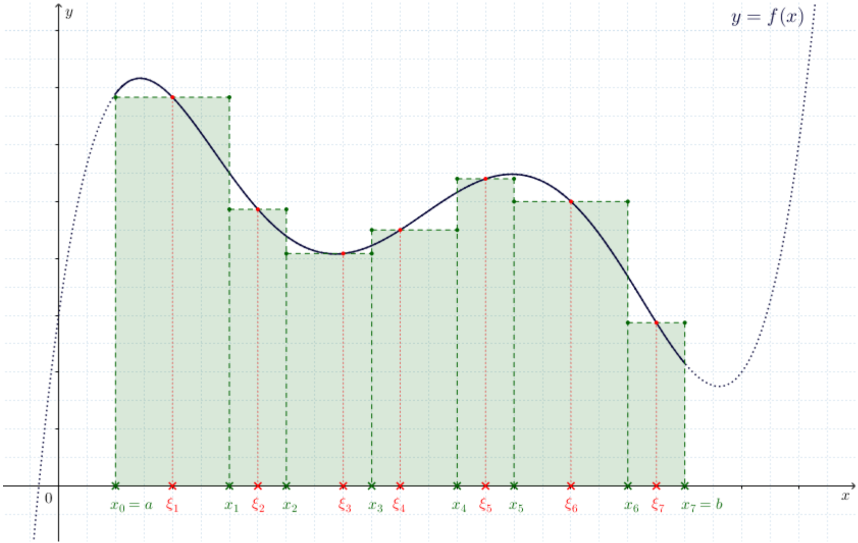
Formalisation



Formalisation



Formalisation



Formalisation

Calculs :

1. Aire de chaque rectangle :

$$Aire_i = (x_i - x_{i-1}).f(\xi_i)$$

Formalisation

Calculs :

1. Aire de chaque rectangle :

$$Aire_i = (x_i - x_{i-1}).f(\xi_i)$$

2. Total :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} Aire_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}).f(\xi_i)$$

Formalisation

Calculs :

1. Aire de chaque rectangle :

$$Aire_i = (x_i - x_{i-1}).f(\xi_i)$$

2. Total :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} Aire_i = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}).f(\xi_i)$$

3. Passage à la limite pour $n \to +\infty$:
    - valeur finie
    - indépendante du choix des sous-intervalles $[x_{i-1}\ ;\ x_i]$
    - indépendante du choix des réels ξ

Définition

Définition.

Cette limite est appelée **intégrale définie de a à b de la fonction f** et est notée

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

- Généralisable à toutes les fonctions définies et continues sur un intervalle fermé.
- « $\int$ » fait référence à « Somme ».
- « $\mathrm{d}x$ » fait référence aux longueurs $(x_i - x_{i-1})$.
- Variable muette.
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ représente une aire uniquement si $f \geq 0$ sur $[a\,;\,b]$.

Théorème fondamental

Le théorème fondamental de l'analyse établit que la primitivation est « l'opération réciproque » de la dérivation.

Il est divisé en deux énoncés :

- le théorème d'existence d'une primitive
- le théorème du lien entre primitive et intégrale

Théorème fondamental

Partie 1 : Existence d'une primitive

Théorème.

Si f une fonction continue sur un intervalle réel $[a\,;\,b]$, alors la fonction

$$A : [a\,;\,b] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Interprétation avec GeoGebra

https://www.geogebra.org/m/bdrf9qs6

Théorème fondamental

Partie 2 : Lien entre primitive et intégrale

Théorème.

Soit f une fonction continue sur un intervalle réel $[a\,;\,b]$. Alors, on a

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive de f.

Notation.

$$[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Théorème fondamental

Partie 2 : Lien entre primitive et intégrale

Démonstration.

On sait que

Théorème fondamental

Partie 2 : Lien entre primitive et intégrale

Démonstration.

On sait que

- $A(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Théorème fondamental

Partie 2 : Lien entre primitive et intégrale

Démonstration.

On sait que

- $A(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.
- toutes les primitives de f sont égales à une constante additive près.

Théorème fondamental

Partie 2 : Lien entre primitive et intégrale

Démonstration.

On sait que

- $A(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.
- toutes les primitives de f sont égales à une constante additive près.

Donc, si F est une primitive de f,

$$\exists\, k \in \mathbb{R} \ : \ A(x) = F(x) + k$$

Théorème fondamental

Partie 2 : Lien entre primitive et intégrale

En évaluant cette égalité en a, on trouve

$$A(a) = F(a) + k$$

Théorème fondamental

Partie 2 : Lien entre primitive et intégrale

En évaluant cette égalité en a, on trouve

$$A(a) = F(a) + k \;\Leftrightarrow\; 0 = F(a) + k$$

Théorème fondamental

Partie 2 : Lien entre primitive et intégrale

En évaluant cette égalité en a, on trouve

$$A(a) = F(a) + k \;\Leftrightarrow\; 0 = F(a) + k \;\Leftrightarrow\; k = -F(a)$$

Théorème fondamental

Partie 2 : Lien entre primitive et intégrale

En évaluant cette égalité en a, on trouve

$$A(a) = F(a) + k \;\Leftrightarrow\; 0 = F(a) + k \;\Leftrightarrow\; k = -F(a)$$

Donc,

$$A(x) = F(x) + k \;\Leftrightarrow\; \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F(a)$$

Théorème fondamental

Partie 2 : Lien entre primitive et intégrale

En évaluant cette égalité en a, on trouve

$$A(a) = F(a) + k \iff 0 = F(a) + k \iff k = -F(a)$$

Donc,

$$A(x) = F(x) + k \iff \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F(a)$$

En évaluant cette dernière égalité en b, on obtient finalement

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

Théorème fondamental

Exemple.

On a

$$\int_1^2 x^3 \, \mathrm{d}x \quad =$$

Théorème fondamental

Exemple.

On a

$$\int_1^2 x^3 \, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2$$

Théorème fondamental

Exemple.

On a

$$\begin{aligned}\int_1^2 x^3 \, \mathrm{d}x &= \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2 \\ &= \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4}\end{aligned}$$

Théorème fondamental

Exemple.

On a

$$\begin{aligned}\int_1^2 x^3 \, \mathrm{d}x &= \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2 \\ &= \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} \\ &= 4 - \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Théorème fondamental

Exemple.

On a

$$\begin{aligned}\int_1^2 x^3 \,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2 \\ &= \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} \\ &= 4 - \frac{1}{4} \\ &= \frac{15}{4}\end{aligned}$$

Propriétés élémentaires

Propriétés.

Pour toute fonction f continue sur un intervalle $[a\,;\,b]$, on a

1. $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$

Propriétés élémentaires

Propriétés.

Pour toute fonction f continue sur un intervalle $[a\,;\,b]$, on a

1. $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$
2. $\displaystyle\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Propriétés élémentaires

Propriétés.

Pour toute fonction f continue sur un intervalle $[a\,;\,b]$, on a

1. $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$
2. $\displaystyle\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle f \geq 0 \;\Rightarrow\; \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$

Propriétés élémentaires

Propriétés.

Pour toute fonction f continue sur un intervalle $[a\,;\,b]$, on a

1. $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$
2. $\displaystyle\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle f \geq 0 \;\Rightarrow\; \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$
4. $\displaystyle f \leq 0 \;\Rightarrow\; \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq 0$

Propriétés élémentaires

Exemple.

On a

$$\int_1^1 x \, \mathrm{d}x =$$

Propriétés élémentaires

Exemple.

On a

$$\int_1^1 x \, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^1 =$$

Propriétés élémentaires

Exemple.

On a

$$\int_{1}^{1} x \, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{1^2}{2} =$$

Propriétés élémentaires

Exemple.

On a
$$\int_1^1 x \, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{1^2}{2} = 0$$

Propriétés élémentaires

Exemple.

On a

$$\int_1^1 x \, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{1^2}{2} = 0$$

Exemple.

Les nombres

$$\int_1^0 2\, e^{2x} \, \mathrm{d}x =$$

Propriétés élémentaires

Exemple.

On a

$$\int_1^1 x \, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{1^2}{2} = 0$$

Exemple.

Les nombres

$$\int_1^0 2\, e^{2x} \, \mathrm{d}x = \left[e^{2x}\right]_1^0 =$$

Propriétés élémentaires

Exemple.

On a

$$\int_1^1 x \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{1^2}{2} = 0$$

Exemple.

Les nombres

$$\int_1^0 2\,e^{2x} \,\mathrm{d}x = \left[e^{2x}\right]_1^0 = e^{2\,.\,0} - e^{2\,.\,1} =$$

Propriétés élémentaires

Exemple.

On a

$$\int_1^1 x \, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{1^2}{2} = 0$$

Exemple.

Les nombres

$$\int_1^0 2\, e^{2x} \, \mathrm{d}x = \left[e^{2x}\right]_1^0 = e^{2\,.\,0} - e^{2\,.\,1} = e^2 - 1$$

et

$$\int_0^1 2\, e^{2x} \, \mathrm{d}x =$$

Propriétés élémentaires

Exemple.

On a

$$\int_1^1 x \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{1^2}{2} = 0$$

Exemple.

Les nombres

$$\int_1^0 2\,e^{2x}\,\mathrm{d}x = \left[e^{2x}\right]_1^0 = e^{2\,.\,0} - e^{2\,.\,1} = e^2 - 1$$

et

$$\int_0^1 2\,e^{2x}\,\mathrm{d}x = \left[e^{2x}\right]_0^1 =$$

Propriétés élémentaires

Exemple.

On a

$$\int_1^1 x \, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{1^2}{2} = 0$$

Exemple.

Les nombres

$$\int_1^0 2\, e^{2x} \, \mathrm{d}x = \left[e^{2x}\right]_1^0 = e^{2\,.\,0} - e^{2\,.\,1} = e^2 - 1$$

et

$$\int_0^1 2\, e^{2x} \, \mathrm{d}x = \left[e^{2x}\right]_0^1 = e^{2\,.\,1} - e^{2\,.\,0} =$$

Propriétés élémentaires

Exemple.

On a

$$\int_1^1 x \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{1^2}{2} = 0$$

Exemple.

Les nombres

$$\int_1^0 2\,e^{2x} \,\mathrm{d}x = \left[e^{2x}\right]_1^0 = e^{2\,.\,0} - e^{2\,.\,1} = e^2 - 1$$

et

$$\int_0^1 2\,e^{2x} \,\mathrm{d}x = \left[e^{2x}\right]_0^1 = e^{2\,.\,1} - e^{2\,.\,0} = 1 - e^2$$

sont opposés.

Propriétés élémentaires

Exemple.

La fonction $x \mapsto x^2$ est strictement positive sur l'intervalle $[1\,;\,2]$ et on a

$$\int_1^2 x^2 \,\mathrm{d}x =$$

Propriétés élémentaires

Exemple.

La fonction $x \mapsto x^2$ est strictement positive sur l'intervalle $[1\,;\,2]$ et on a

$$\int_1^2 x^2 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 =$$

Propriétés élémentaires

Exemple.

La fonction $x \mapsto x^2$ est strictement positive sur l'intervalle $[1\,;\,2]$ et on a

$$\int_1^2 x^2 \, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} =$$

Propriétés élémentaires

Exemple.

La fonction $x \mapsto x^2$ est strictement positive sur l'intervalle $[1\,;\,2]$ et on a

$$\int_1^2 x^2 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3} > 0$$

Propriétés élémentaires

Exemple.

La fonction $x \mapsto x^2$ est strictement positive sur l'intervalle $[1\,;\,2]$ et on a

$$\int_1^2 x^2 \, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3} > 0$$

Exemple.

La fonction $x \mapsto -x$ est strictement négative sur l'intervalle $[4\,;\,7]$ et on a

$$\int_4^7 -x \, \mathrm{d}x =$$

Propriétés élémentaires

Exemple.

La fonction $x \mapsto x^2$ est strictement positive sur l'intervalle $[1\,;\,2]$ et on a

$$\int_1^2 x^2 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3} > 0$$

Exemple.

La fonction $x \mapsto -x$ est strictement négative sur l'intervalle $[4\,;\,7]$ et on a

$$\int_4^7 -x \,\mathrm{d}x = \left[\frac{-x^2}{2}\right]_4^7 =$$

Propriétés élémentaires

Exemple.

La fonction $x \mapsto x^2$ est strictement positive sur l'intervalle $[1\,;\,2]$ et on a

$$\int_1^2 x^2 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3} > 0$$

Exemple.

La fonction $x \mapsto -x$ est strictement négative sur l'intervalle $[4\,;\,7]$ et on a

$$\int_4^7 -x \,\mathrm{d}x = \left[\frac{-x^2}{2}\right]_4^7 = \frac{-7^2}{2} - \frac{-4^2}{2} =$$

Propriétés élémentaires

Exemple.

La fonction $x \mapsto x^2$ est strictement positive sur l'intervalle $[1\,;\,2]$ et on a

$$\int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3} > 0$$

Exemple.

La fonction $x \mapsto -x$ est strictement négative sur l'intervalle $[4\,;\,7]$ et on a

$$\int_4^7 -x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{-x^2}{2}\right]_4^7 = \frac{-7^2}{2} - \frac{-4^2}{2} = -\frac{33}{2} > 0$$

Combinaison linéaire

Propriété.

Pour toutes fonctions f et g continues sur un intervalle $[a\,;\,b]$ et tous réel k, ℓ, on a

$$\int_a^b k\,.\,f(x)+\ell\,.\,g(x)\ \mathrm{d}x = k\,.\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x + \ell\,.\int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x\,.$$

Combinaison linéaire

Exemple.

On a

$$\int_{-1}^{3} 2x^2 - \frac{3}{x}\,\mathrm{d}x \quad =$$

Combinaison linéaire

Exemple.

On a

$$\int_{-1}^{3} 2x^2 - \frac{3}{x}\,\mathrm{d}x \quad = \quad 2\int_{-1}^{3} x^2\,\mathrm{d}x - 3\int_{-1}^{3} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

Combinaison linéaire

Exemple.

On a

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{3} 2x^2 - \frac{3}{x}\,\mathrm{d}x &= 2\int_{-1}^{3} x^2\,\mathrm{d}x - 3\int_{-1}^{3}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{3} - 3\left[\ln|x|\right]_{-1}^{3}\end{aligned}$$

Combinaison linéaire

Exemple.

On a

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{3} 2x^2 - \frac{3}{x}\,\mathrm{d}x &= 2\int_{-1}^{3} x^2\,\mathrm{d}x - 3\int_{-1}^{3} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{3} - 3\left[\ln|x|\right]_{-1}^{3} \\ &= 2\left(\frac{3^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3}\right) - 3\left(\ln|3| - \ln|-1|\right)\end{aligned}$$

Combinaison linéaire

Exemple.

On a

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{3} 2x^2 - \frac{3}{x}\,\mathrm{d}x &= 2\int_{-1}^{3} x^2\,\mathrm{d}x - 3\int_{-1}^{3} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{3} - 3\left[\ln|x|\right]_{-1}^{3} \\
&= 2\left(\frac{3^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3}\right) - 3\left(\ln|3| - \ln|-1|\right) \\
&= 2\,\frac{28}{3} - 3\,\ln(3)
\end{aligned}$$

Combinaison linéaire

Exemple.

On a

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{3} 2x^2 - \frac{3}{x}\,\mathrm{d}x &= 2\int_{-1}^{3} x^2\,\mathrm{d}x - 3\int_{-1}^{3} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{3} - 3\left[\ln|x|\right]_{-1}^{3} \\
&= 2\left(\frac{3^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3}\right) - 3\left(\ln|3| - \ln|-1|\right) \\
&= 2\,\frac{28}{3} - 3\,\ln(3) \\
&= \frac{56}{3} - 3\,\ln(3)
\end{aligned}$$

Linéarité

Propriété.

Pour toute fonction f continue sur un intervalle $[a\,;\,b]$ et tout $c \in [a\,;\,b]$, on a

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Illustration avec GeoGebra

https://www.geogebra.org/m/heyxgaeq

IPS

Propriété.

Pour toutes fonctions f et g continues sur un intervalle $[a\,;\,b]$, on a

$$\int_a^b f\left(g(x)\right).g'(x)\;\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,\mathrm{d}t$$

en posant $t = g(x)$.

IPS

Exemple.

On veut calculer

$$\int_1^e \frac{1}{x\,(1+\ln(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

IPS

Exemple.

On veut calculer

$$\int_1^e \frac{1}{x\left(1+\ln(x)\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

On pose

$$t = 1+\ln(x)$$

IPS

Exemple.

On veut calculer

$$\int_1^e \frac{1}{x\left(1+\ln(x)\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

On pose

$$\begin{aligned} t &= 1+\ln(x) \\ \mathrm{d}t &= \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

IPS

Exemple.

On veut calculer

$$\int_1^e \frac{1}{x\left(1+\ln(x)\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

On pose

$$\begin{aligned} t &= 1+\ln(x) \\ \mathrm{d}t &= \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Les bornes de l'intégrale deviennent alors

$$x = 1 \quad \Rightarrow \quad t = 1+\ln(1) = 1$$

IPS

Exemple.

On veut calculer

$$\int_1^e \frac{1}{x\,(1+\ln(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

On pose

$$\begin{aligned} t &= 1+\ln(x) \\ \mathrm{d}t &= \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Les bornes de l'intégrale deviennent alors

$$\begin{aligned} x=1 &\quad\Rightarrow\quad t = 1+\ln(1) = 1 \\ x=e &\quad\Rightarrow\quad t = 1+\ln(e) = 2 \end{aligned}$$

IPS

Donc

$$\int_1^e \frac{1}{x\left(1+\ln(x)\right)^2}\,\mathrm{d}x \quad =$$

IPS

Donc

$$\int_1^e \frac{1}{x\,(1+\ln(x))^2}\,\mathrm{d}x \quad = \quad \int_1^2 \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

IPS

Donc

$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{1}{x\,(1+\ln(x))^2}\,\mathrm{d}x &= \int_1^2 \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_1^2 t^{-2}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

IPS

Donc

$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{1}{x\left(1+\ln(x)\right)^2}\,\mathrm{d}x &= \int_1^2 \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_1^2 t^{-2}\,\mathrm{d}t\\ &= \left[\frac{t^{-1}}{-1}\right]_1^2\end{aligned}$$

IPS

Donc

$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{1}{x\,(1+\ln(x))^2}\,\mathrm{d}x &= \int_1^2 \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_1^2 t^{-2}\,\mathrm{d}t\\ &= \left[\frac{t^{-1}}{-1}\right]_1^2\\ &= \left[-\frac{1}{t}\right]_1^2\end{aligned}$$

IPS

Donc

$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{1}{x\,(1+\ln(x))^2}\,\mathrm{d}x &= \int_1^2 \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_1^2 t^{-2}\,\mathrm{d}t\\ &= \left[\frac{t^{-1}}{-1}\right]_1^2\\ &= \left[-\frac{1}{t}\right]_1^2\\ &= -\frac{1}{2}+\frac{1}{1}\end{aligned}$$

IPS

Donc

$$\begin{aligned}
\int_1^e \frac{1}{x\,(1+\ln(x))^2}\,\mathrm{d}x &= \int_1^2 \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_1^2 t^{-2}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{t^{-1}}{-1}\right]_1^2 \\
&= \left[-\frac{1}{t}\right]_1^2 \\
&= -\frac{1}{2}+\frac{1}{1} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

ICV

Propriété.

Pour toutes fonction f continue sur un intervalle $[a\,;\,b]$, on a

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f\left(g(t)\right).g'(t)\,\mathrm{d}t$$

en posant $x = g(t)$.

ICV

Exemple.

On veut calculer

$$\int_1^3 x\sqrt{x-1}\,\mathrm{d}x$$

ICV

Exemple.

On veut calculer

$$\int_1^3 x\sqrt{x-1}\,\mathrm{d}x$$

On pose

$$t = x-1$$

ICV

Exemple.

On veut calculer

$$\int_1^3 x\sqrt{x-1}\,\mathrm{d}x$$

On pose

$$\begin{aligned} t &= x-1 \\ x &= t+1 \end{aligned}$$

ICV

Exemple.

On veut calculer

$$\int_1^3 x\,\sqrt{x-1}\,\mathrm{d}x$$

On pose

$$\begin{aligned} t &= x-1 \\ x &= t+1 \\ \mathrm{d}x &= 1\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

ICV

Exemple.

On veut calculer

$$\int_1^3 x\sqrt{x-1}\,\mathrm{d}x$$

On pose

$$\begin{aligned} t &= x-1 \\ x &= t+1 \\ \mathrm{d}x &= 1\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Les bornes de l'intégrale deviennent alors

$$x = 1 \quad \Rightarrow \quad t = 3-1 = 2$$

ICV

Exemple.

On veut calculer

$$\int_1^3 x\sqrt{x-1}\,\mathrm{d}x$$

On pose

$$\begin{array}{rcl} t & = & x-1 \\ x & = & t+1 \\ \mathrm{d}x & = & 1\,\mathrm{d}x \end{array}$$

Les bornes de l'intégrale deviennent alors

$$\begin{array}{lcl} x=1 & \Rightarrow & t=3-1=2 \\ x=3 & \Rightarrow & t=3-3=0 \end{array}$$

ICV

Donc,

$$\int_1^3 x\sqrt{x-1}\,\mathrm{d}x \quad =$$

ICV

Donc,

$$\int_1^3 x\sqrt{x-1}\,\mathrm{d}x \quad = \quad \int_2^0 (t-1)\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$$

ICV

Donc,

$$\begin{aligned}\int_1^3 x\sqrt{x-1}\,\mathrm{d}x &= \int_2^0 (t-1)\sqrt{t}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_2^0 t^{3/2}-t^{1/2}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

ICV

Donc,

$$\begin{aligned}
\int_1^3 x\sqrt{x-1}\,\mathrm{d}x &= \int_2^0 (t-1)\sqrt{t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_2^0 t^{3/2} - t^{1/2}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{t^{5/2}}{\frac{5}{2}} - \frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right]_2^0
\end{aligned}$$

ICV

Donc,

$$\begin{aligned}
\int_1^3 x\sqrt{x-1}\,\mathrm{d}x &= \int_2^0 (t-1)\sqrt{t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_2^0 t^{3/2} - t^{1/2}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{t^{5/2}}{\frac{5}{2}} - \frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right]_2^0 \\
&= \left[\frac{2}{5}\sqrt{t^5} - \frac{2}{3}\sqrt{t^3}\right]_2^0
\end{aligned}$$

ICV

Donc,

$$\begin{aligned}
\int_1^3 x\sqrt{x-1}\,\mathrm{d}x &= \int_2^0 (t-1)\sqrt{t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_2^0 t^{3/2} - t^{1/2}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{t^{5/2}}{\frac{5}{2}} - \frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right]_2^0 \\
&= \left[\frac{2}{5}\sqrt{t^5} - \frac{2}{3}\sqrt{t^3}\right]_2^0 \\
&= \left(\frac{2}{5}\sqrt{2^5} - \frac{2}{3}\sqrt{2^3}\right) - \left(\frac{2}{5}\sqrt{0^5} - \frac{2}{3}\sqrt{0^3}\right)
\end{aligned}$$

ICV

Donc,

$$\begin{aligned}
\int_1^3 x\sqrt{x-1}\,\mathrm{d}x &= \int_2^0 (t-1)\sqrt{t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_2^0 t^{3/2} - t^{1/2}\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{t^{5/2}}{\frac{5}{2}} - \frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right]_2^0 \\
&= \left[\frac{2}{5}\sqrt{t^5} - \frac{2}{3}\sqrt{t^3}\right]_2^0 \\
&= \left(\frac{2}{5}\sqrt{2^5} - \frac{2}{3}\sqrt{2^3}\right) - \left(\frac{2}{5}\sqrt{0^5} - \frac{2}{3}\sqrt{0^3}\right) \\
&= \frac{4\sqrt{2}}{15}
\end{aligned}$$

IPP

Propriété.

Pour toutes fonctions f et g continues sur un intervalle $[a\,;\,b]$, on a

$$\int_a^b f'(x)\,.\,g(x)\;\mathrm{d}x = [f(x)\,.\,g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)\,.\,g'(x)\;\mathrm{d}x\,.$$

IPP

Exemple.

On veut calculer

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} x \,.\, \cos(x)\, \mathrm{d}x$$

IPP

Exemple.

On veut calculer

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} x \,.\, \cos(x)\ \mathrm{d}x$$

On pose

$$f(x) = x$$

IPP

Exemple.

On veut calculer

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} x \,.\, \cos(x)\ \mathrm{d}x$$

On pose

$$f(x) = x \qquad ; \qquad f'(x) = 1$$

IPP

Exemple.

On veut calculer

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} x \,.\, \cos(x)\ \mathrm{d}x$$

On pose

$$f(x) = x \qquad ; \qquad f'(x) = 1$$
$$g'(x) = \cos(x)$$

IPP

Exemple.

On veut calculer

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} x \,.\, \cos(x)\ \mathrm{d}x$$

On pose

$$\begin{array}{rcl} f(x) = x & ; & f'(x) = 1 \\ g'(x) = \cos(x) & ; & g(x) = \sin(x) \end{array}$$

IPP

Donc,

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} x \, . \, \cos(x) \; \mathrm{d}x \quad =$$

IPP

Donc,

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} x \, . \, \cos(x) \, \mathrm{d}x \quad = \quad [x \, . \, \sin(x)]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} 1 \, . \, \sin(x) \, \mathrm{d}x$$

IPP

Donc,

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} x\,.\,\cos(x)\;\mathrm{d}x &= [x\,.\,\sin(x)]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} 1\,.\,\sin(x)\;\mathrm{d}x \\ &= [x\,.\,\sin(x)]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} - [-\cos(x)]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\end{aligned}$$

IPP

Donc,

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} x\,.\,\cos(x)\ \mathrm{d}x &= [x\,.\,\sin(x)]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} 1\,.\,\sin(x)\ \mathrm{d}x \\
&= [x\,.\,\sin(x)]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} - [-\cos(x)]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \\
&= [x\,.\,\sin(x) + \cos(x)]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}
\end{aligned}$$

IPP

Donc,

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} x \,.\, \cos(x)\, \mathrm{d}x &= \left[x \,.\, \sin(x)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} 1 \,.\, \sin(x)\, \mathrm{d}x \\
&= \left[x \,.\, \sin(x)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} - \left[-\cos(x)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \\
&= \left[x \,.\, \sin(x) + \cos(x)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \\
&= \left(\pi \,.\, \sin(\pi) + \cos(\pi)\right)
\end{aligned}$$

IPP

Donc,

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} x\,.\,\cos(x)\ \mathrm{d}x &= [x\,.\,\sin(x)]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} 1\,.\,\sin(x)\ \mathrm{d}x \\
&= [x\,.\,\sin(x)]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} - [-\cos(x)]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \\
&= [x\,.\,\sin(x) + \cos(x)]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \\
&= (\pi\,.\,\sin(\pi) + \cos(\pi)) \\
&\qquad - \left(\frac{\pi}{4}\,.\,\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)
\end{aligned}$$

IPP

Donc,

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} x \,.\, \cos(x)\ \mathrm{d}x &= [x \,.\, \sin(x)]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} 1 \,.\, \sin(x)\ \mathrm{d}x \\
&= [x \,.\, \sin(x)]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} - [-\cos(x)]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \\
&= [x \,.\, \sin(x) + \cos(x)]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \\
&= (\pi \,.\, \sin(\pi) + \cos(\pi)) \\
&\qquad - \left(\frac{\pi}{4} \,.\, \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \\
&= -\frac{8 + 5\sqrt{2}\pi}{8}
\end{aligned}$$

Exercices Page 28 du cours.

Bon travail !