Correctif (1)

Correction ex sur la loi binomiale.

1 a) Il s'agit d'une épreuve de Bernoulli car l'expérience n'a que 2 issues possibles :

A = " obtenir une boule verte " $\rightarrow p$ = proba du succès = $\frac{2}{5}$

$\bar{A}$ = " obtenir une boule non verte (rouge) " $\rightarrow q$ = proba de l'échec = $\frac{3}{5}$

b) épreuve de Bernoulli car 2 issues possibles

B = " une fille va décrocher " $\rightarrow p$ = proba du succès = $\frac{2}{5}$

$\bar{B}$ = " un garçon va décrocher " $\rightarrow q = \frac{3}{5}$

c) épreuve de Bernoulli car 2 issues possibles

C = " tirer une carte image " $\rightarrow p = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$ (car il y a 4 valets, 4 dames, 4 rois donc 12 images)

$\bar{C}$ = " tirer une carte autre qu'une image " $\rightarrow q = 1 - p = \frac{40}{52} = \frac{10}{13}$

---

2) ex 1 du cours p 15

1 a) 2 issues possibles : soit la facture est impayée avec une proba $p = \frac{4}{100} = 0{,}04$

soit la facture est payée avec une proba $q = 1 - \frac{4}{100} = 0{,}96$

il y a 25 factures envoyées ; donc $n = 25$.

On note la loi binomiale $B(25 ; 0{,}04)$

b) $P(X=k) = C_n^k \, p^k \, q^{n-k}$

$P(X=5) = \underbrace{C_{25}^5}_{\frac{25!}{20!\,5!} = 53130} (0{,}04)^5 (0{,}96)^{20} = 0{,}0024$

ex 2 du cours p 15

2 issues possibles → on gagne avec une proba $p = \frac{10}{500} = 0{,}02$ → on perd avec une proba $q = 1 - \frac{10}{500} = 0{,}98$ } schéma de Bernoulli

a) on achète 8 billets ⇒ $n = 8$

X = " nombre de billets gagnants "

$P(X \geq 1) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + \ldots + P(X=8)$ trop long !

$= 1 - P(X=0) = 1 - C_8^0 \cdot (0{,}02)^0 \cdot (0{,}98)^8 = 0{,}149$

ex2 cours b) $p(X \geq 2)$ avec $n=20$ car on achète 20 billets

$$= 1 - \left(p(X=0) + p(X=1) \right)$$

$$p(X=0) = \underbrace{C_{20}^{0}}_{1} (0,02)^0 . (0,98)^{20}$$

$$p(X=1) = \underbrace{C_{20}^{1}}_{20} (0,02)^1 (0,98)^{19}$$

$$= 0,06$$

ex n° 3 du cours p 15

X = "nbr d'enfants qui ont le caract. héréditaire" dans la famille

- soit l'enfant a le caract héréditaire → $p = 0,58$
- soit l'enfant n'a pas le caract. héréditaire → $q = 1 - p = 0,42$

et $n = 5$

a) $p(X=3) = \underbrace{C_5^3}_{\frac{5!}{3!2!} = 10} . (0,58)^3 . (0,42)^2 = 0,344$

b) $p(X=0) = \underbrace{C_5^0}_{1} (0,58)^0 (0,42)^5 = 0,013$

c) $p(X \geq 2) = 1 - [\underbrace{p(X=0)}_{0,013} + \underbrace{p(X=1)}_{C_5^1 . (0,58)^1 (0,42)^4 = 0,09}]$

$= 0,897$

Ex sur les lois de probabilité

(X) = G = "gain algébrique d'un billet"

a) . Soit le billet n'est pas gagnant, et comme on a payé le billet ⇒ $G = -2$

. Soit le billet rapporte 500 € − 2 € (achat) ⇒ $G = 498$

. Soit le billet rapporte 100 € − 2 € (achat) ⇒ $G = 98$

. Soit le billet rapporte 50 € − 2 € (achat) ⇒ $G = 48$

b) $p(G=-2) = p(\text{billet perdant}) = \frac{90}{100}$ (car il y a 10 billets gagnants)

$p(G=498) = p(\text{avoir le billet qui rapporte } 500\text{ €}) = \frac{1}{100}$

suite du b) $p(G=98) = p(\text{avoir un billet qui rapporte } 100 €)$

$= \frac{2}{100}$

$p(G=48) = p(\text{avoir un billet qui rapporte } 50 €)$

$= \frac{7}{100}$

donc loi de proba :

$G =$	-2	498	98	48
$P(G)$:	$\frac{90}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{2}{100}$	$\frac{7}{100}$

c) $E(G) = -2 \cdot \frac{90}{100} + 498 \cdot \frac{1}{100} + 98 \cdot \frac{2}{100} + 48 \cdot \frac{7}{100} = \frac{850}{100} = 8,5$

le gain moyen est de 8,5 € par billet

Correctif (2)

Correctif

① a) le fait de ne pas le remettre avant de tirer le suivant fait qu'on change les conditions de l'expérience. Or pour avoir un schéma de Bernoulli, il faut des expériences indépendantes (le résultat de la 2e étape ne dépend pas du résultat de la 1e étape)

On avait 5 chances sur 10 au 1er tirage d'avoir un poussin jaune.

A la 2e fois, on aura 4 chances sur 9, donc les événements ne sont pas indépendants ⇒ pas de schéma de Bernoulli.

b) on remet le poussin choisi avant de retirer un second ⇒ on avait 5 chances sur 10 au 1er tirage, et encore 5 chances sur 10 au 2e tirage

⇒ on a un schéma de Bernoulli

succès $= p$ = proba d'avoir un jaune $= \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

échec $= q =$ proba de ne pas avoir un jaune $= \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

② X = nbr de boules noires qd on tire successivement 4 boules.

a) et b) $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. La loi est une loi binomiale $B(4 ; \frac{5}{8})$

on fait 4 fois l'expérience car on tire 4 boules

proba d'avoir 1 noire $= 5/8$

x_i	0	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\underbrace{\underset{1}{C_4^0}\left(\frac{5}{8}\right)^0\left(\frac{3}{8}\right)^4}_{0{,}019775...}$ (voir tableau p 12)	$\underbrace{\underset{4}{C_4^1}\left(\frac{5}{8}\right)^1\left(\frac{3}{8}\right)^3}_{0{,}1318359...}$	$\underbrace{\underset{6}{C_4^2}\left(\frac{5}{8}\right)^2\left(\frac{3}{8}\right)^2}_{0{,}3295898...}$	$\underbrace{\underset{4}{C_4^3}\left(\frac{5}{8}\right)^3\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^1}_{=0{,}36621}$	$\underbrace{\underset{1}{C_4^4}\left(\frac{5}{8}\right)^4\left(\frac{3}{8}\right)^0}_{=\left(\frac{5}{8}\right)^4=0{,}152587}$

c) $P(X=3) = C_4^3 \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^3 \left(\frac{3}{8}\right)^1 = 0{,}36621$

d) P(avoir 3 noires ou 4 noires qd on tire 4 boules) $= P(X=3) + P(X=4)$

$= 0{,}36621 + 0{,}152587 = 0{,}51879$

(3). on lance 10 fois un dé $\Rightarrow n = 10$

X = "nombre de fois que la face 1 apparaît"

Si la face 1 apparaît $\rightarrow$ succès de proba $p = \frac{1}{6}$

Si la face 1 n'apparaît pas $\rightarrow$ échec de proba $q = \frac{5}{6}$

a) X suit une binomiale $B(n, p) = B(10; \frac{1}{6})$

b) $p(X=3) = C_{10}^{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^7$

$\frac{10!}{7!3!}$ ou voir p 12 dans le tableau

$= 120 \cdot \frac{5^7}{6^{10}} \simeq 0,155$

$= 120$

c) $p(X \geq 1) = p(X=1) + p(X=2) + p(X=3) + \dots + p(X=10)$

$= 1 - p(X=0)$

$= 1 - \underbrace{C_{10}^{0}}_{1} \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^{10} = 0,838$

---

(4) on travaille sur les familles de 10 enfants $\Rightarrow n = 10$.

On peut choisir X = "nbr de filles ds une famille" $= \{0, 1, \dots 10\}$

X a une proba de succès $p = \frac{1}{2}$ (1 chance sur 2 d'être 1 fille)

a une proba = échec $= q = \frac{1}{2}$ (1 chance sur 2 d'être 1 garçon)

a) $p(X=2) = C_{10}^{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^8 = 45 \cdot \frac{1}{2^{10}} = 0,0439$

b) p(avoir 0 garçon ou 1 gars ou 2 garçons)

= p(10 filles ou 9 filles ou 8 filles)

$= p(X=10) + p(X=9) + p(X=8)$

$= C_{10}^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 + C_{10}^{9} \left(\frac{1}{2}\right)^9 \left(\frac{1}{2}\right)^1 + C_{10}^{8} \left(\frac{1}{2}\right)^8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$= \underbrace{1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}_{0,000976\dots} + \underbrace{10 \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}_{0,009765} + \underbrace{45 \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}_{0,0439} = \frac{7}{128} = 0,0546875$