Correctif (1)

Correctif sur les ex supplémentaires - les complexes

1) 1°) $(4+i)^2+(2i-1)(-5+3i)+i^{19} = 16+8i+i^2-10i+6i^2+5-3i+i^{16+3}$

$= 16+8i-1-10i-6+5-3i+(-i) = 14-6i$

2°) $\dfrac{5-2i}{5+2i} = \dfrac{(5-2i)(5-2i)}{(5+2i)(5-2i)} = \dfrac{(5-2i)^2}{25-4i^2} = \dfrac{25-20i+4i^2}{25+4} = \dfrac{21-20i}{29}$

3°) $\dfrac{1+i}{2-i}+\dfrac{2+i}{1-i} = \dfrac{(1+i)(1-i)+(2+i)(2-i)}{(2-i)(1-i)} = \dfrac{1-i^2+4-i^2}{2-2i-i+i^2}$

$= \dfrac{2+5}{1-3i} = \dfrac{7}{1-3i} = \dfrac{7(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)} = \dfrac{7+21i}{1-9i^2} = \dfrac{7+21i}{10}$

---

2) a) $\sqrt{-2i} = x+iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow -2i = (x+iy)^2 = x^2+2xyi-y^2$

$\begin{cases} 0 = x^2-y^2 \\ -2 = 2xy \Rightarrow y = -\dfrac{1}{x} \end{cases}$ $\quad 0 = x^2-\left(-\dfrac{1}{x}\right)^2 \Rightarrow 0 = x^2-\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^4-1}{x^2}$

$\Rightarrow x = \pm 1$ et $\begin{cases} \text{si } x = 1, & y = -1 \\ \text{si } x = -1, & y = 1 \end{cases}$ $\Rightarrow \sqrt{-2i} = \begin{cases} 1-i \\ -1+i \end{cases}$

b) $\sqrt{3+4i} = x+iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 3+4i = (x+iy)^2 = x^2+2xyi-y^2$

$\begin{cases} 3 = x^2-y^2 \\ 4 = 2xy \to y = \dfrac{2}{x} \end{cases}$ $\quad 3 = x^2-\dfrac{4}{x^2}$ $\quad 3x^2 = x^4-4 \to 0 = x^4-3x^2-4$

on pose $x^2 = t \to 0 = t^2-3t-4$

$\Delta = 9-4\cdot(-4) = 25 \to t_{1,2} = \dfrac{3\pm 5}{2} \to 4$; $\cancel{\to -1}$

$\Rightarrow x = \pm 2 \leadsto \begin{cases} \text{si } x = 2, & y = 1 \\ \text{si } x = -2, & y = -1 \end{cases}$

$\sqrt{3+4i} = \begin{cases} 2+i \\ -2-i \end{cases}$

2c) $\sqrt{7+6\sqrt{2}i} = x+iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$

$7+6\sqrt{2}i = (x+iy)^2 = x^2+2xyi-y^2$

$\begin{cases} 7 = x^2-y^2 \\ 6\sqrt{2} = 2xy \rightarrow y = \frac{3\sqrt{2}}{x} \end{cases}$ $\quad 7 = x^2 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{x}\right)^2 \Rightarrow 7 = x^2 - \frac{18}{x^2} \Rightarrow 7x^2 = x^4 - 18$

on pose $x^2 = t \rightarrow 0 = t^2 - 7t - 18 \quad \Delta = 49 - 4 \cdot 1(-18) = 121$

$t_{1,2} = \frac{7 \pm 11}{2} \begin{matrix} \nearrow 9 \\ \searrow \cancel{-2} \end{matrix} \Rightarrow x = \pm 3$

$\begin{cases} \text{Si } x = 3, \ y = \frac{3\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2} \\ \text{Si } x = -3, \ y = -\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{7+6\sqrt{2}i} = \begin{cases} 3+i\sqrt{2} \\ -3-i\sqrt{2} \end{cases}$

3a) $z^2 - 2z + 5 = 0 \quad \Delta = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16$

$\sqrt{-16} = \pm 4i \rightarrow z_{1,2} = \frac{2 \pm 4i}{2} \begin{matrix} \nearrow 1+2i \\ \searrow 1-2i \end{matrix} \quad S = \{1+2i ; 1-2i\}$

b) $z^2 - 4iz + (-4+2i) = 0 \quad \Delta = (-4i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4+2i)$
$= 16i^2 - 4(-4+2i)$
$= -16 + 16 - 8i = -8i$

$\sqrt{-8i}$? $\quad \sqrt{-8i} = x+iy \Leftrightarrow -8i = x^2 - y^2 + 2xyi$

$\begin{cases} 0 = x^2 - y^2 \\ -8 = 2xy \rightarrow y = \frac{-4}{x} \end{cases}$ $\quad \Rightarrow 0 = x^2 - \left(\frac{16}{x^2}\right) \Rightarrow 0 = x^4 - 16 \Rightarrow x = \pm 2$

$\begin{cases} \text{Si } x = 2, \ y = -2 \\ \text{Si } x = -2, \ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{-8i} = \begin{cases} 2-2i \\ -2+2i \end{cases}$

$z_{1,2} = \frac{4i \pm (2-2i)}{2} \begin{matrix} \nearrow \frac{4i+2-2i}{2} = \frac{2i+2}{2} = i+1 \\ \searrow \frac{4i-2+2i}{2} = \frac{6i-2}{2} = 3i-1 \end{matrix}$

$S = \{i+1 ; 3i-1\}$

3c) $2iz^2 - (1+2i)z + (i-1) = 0$

$$\Delta = (1+2i)^2 - 4.2i\,(i-1) = 1 + 4i + 4i^2 - 8i(i-1) = 1+4i-4+8+8i$$
$$= 12i + 5$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{12i+5} = ? = x+iy \quad \text{avec } x, y \in \mathbb{R}$$

$$12i+5 = x^2 - y^2 + 2xyi \qquad \begin{cases} 5 = x^2 - y^2 \\ 12 = 2xy \rightarrow y = \frac{6}{x} \end{cases} \rightarrow 5 = x^2 - \frac{36}{x^2}$$

$$\Rightarrow 5x^2 = x^4 - 36 \qquad \text{on pose } x^2 = t$$

$$\Rightarrow 0 = t^2 - 5t - 36 \qquad \Delta = 25 - 4.1(-36) = 169 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{5 \pm 13}{2} \begin{matrix} \rightarrow 9 \\ \rightarrow \cancel{-4} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow x = \pm 3 \leadsto \text{si } x = 3,\ y = \frac{6}{3} = 2 \qquad \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \begin{cases} 3+2i \\ -3-2i \end{cases}$$
$$\text{si } x = -3,\ y = -2$$

$$z_{1,2} = \frac{(1+2i) \pm (3+2i)}{4i} \rightarrow \frac{1+2i+3+2i}{4i} = \frac{(4i+4)\,i}{(4i)\,i} = \frac{-4+4i}{-4} = 1-i$$

$$\rightarrow \frac{1+2i-(3+2i)}{4i} = \frac{-2i}{4ii} = \frac{-2i}{-4} = \frac{i}{2}$$

$$S = \left\{ 1-i\ ;\ \frac{i}{2} \right\}$$

3d) $(-3+i)z^2 + (5i-1)z + 2 = 0$

$$\Delta = (5i-1)^2 - 4.(-3+i).2 = \underbrace{25i^2}_{-25} - 10i + 1 + 24 - 8i = -18i$$

$$\sqrt{-18i} = ? = x+iy \quad \text{avec } x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow -18i = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$\begin{cases} 0 = x^2 - y^2 \\ -18 = 2xy \rightarrow y = -\frac{9}{x} \end{cases} \qquad 0 = x^2 - \left(-\frac{9}{x}\right)^2 \Rightarrow 0 = x^2 - \frac{81}{x^2} \Rightarrow 0 = x^4 - 81$$

$$\rightarrow x = \pm 3 \leadsto \begin{cases} \text{si } x = 3,\ y = -3 \\ \text{si } x = -3,\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{-18i} = \begin{cases} 3-3i \\ -3+3i \end{cases}$$

$$z_{1,2} = \frac{-(5i-1) \pm (3-3i)}{2(-3+i)} \rightarrow \frac{-5i+1+3-3i}{-6+2i} = \frac{(-8i+4)(-6-2i)}{(-6+2i)(-6-2i)}$$

$$= \frac{48i + 16i^2 - 24 - 8i}{36 - 4i^2} = \frac{40i - 40}{40} = i - 1$$

$$\frac{-5i+1-3+3i}{-6+2i} = \frac{(-2i-2)(-6-2i)}{(-6+2i)(-6-2i)} = \frac{16i+8}{40} = \frac{2i+1}{5}$$

$$S = \left\{ i-1\ ;\ \frac{2i+1}{5} \right\}$$

4) a) $1-i \quad = z_A$

$\rho = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\left.\begin{array}{l} \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\alpha = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \alpha = -45^\circ \quad \Rightarrow 1-i = \sqrt{2}\left(\cos(-45^\circ) + i\sin(-45^\circ)\right)$

b) $2i \quad = z_B$

$\rho = \sqrt{4} = 2$

$\left.\begin{array}{l} \cos\alpha = 0 \\ \sin\alpha = \dfrac{2}{2} = 1 \end{array}\right\} \alpha = 90^\circ \quad \Rightarrow 2i = 2\left(\cos(90^\circ) + i\sin 90^\circ\right)$

c) $-1 + i\sqrt{3} \quad = z_C$

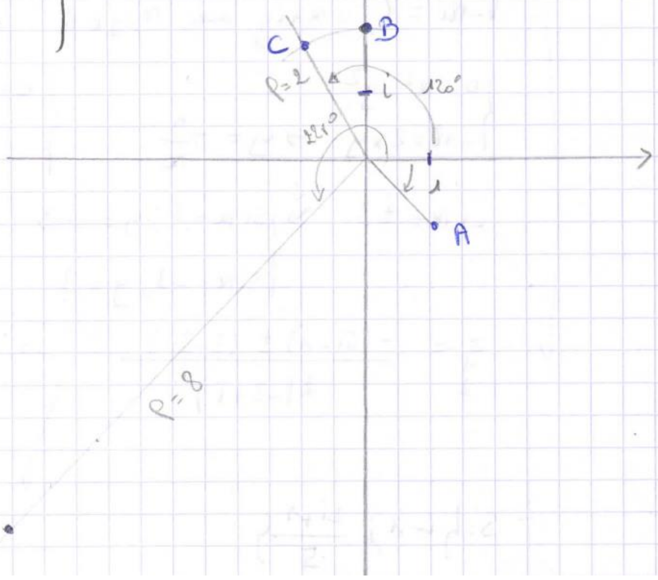
$\rho = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

$\left.\begin{array}{l} \cos\alpha = \dfrac{-1}{2} \\ \sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \alpha = 120^\circ \quad \Rightarrow -1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ\right)$

d) $-4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}\,i \quad = z_D$

$\rho = \sqrt{(-4\sqrt{2})^2 + (-4\sqrt{2})^2} = \sqrt{64} = 8$

$\left.\begin{array}{l} \cos\alpha = \dfrac{-4\sqrt{2}}{8} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\alpha = -\dfrac{4\sqrt{2}}{8} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = 225^\circ \rightarrow -4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}\,i = 8\left(\cos 225^\circ + i\sin 225^\circ\right)$



Correctif (2)

Correction : ex analyse combinatoire

Combinatoire

1) l'ordre n'a pas d'importance

a) $C_{11}^{6} = 462$

b) $C_{7}^{3} \cdot C_{4}^{2} = 35 \cdot 6 = 210$

c) Soit le couple d'anglais vient (il faut donc encore prendre un anglais)

$$\underbrace{C_{5}^{1}}_{\text{choix de l'anglais qui reste à prendre parmi 7 - le couple qui vient directement}} \cdot C_{4}^{2} = 5 \cdot 6 = 30$$

Soit le couple d'anglais ne vient pas (il faut donc choisir 3 anglais quand même)

$$C_{5}^{3} \cdot C_{4}^{2} = 10 \cdot 6 = 60$$

$\Rightarrow$ Au total : $30 + 60 = 90$ possibilités

2) l'ordre a de l'importance et il y a 7 chiffres disponibles au départ

a) $A_{7}^{4} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$

b) Soit les nombres sont du type $\underbrace{6\ .\ .\ .}_{A_6^3}$ ou $\underbrace{7\ .\ .\ .}_{A_6^3 \text{ possibilités}}$ ou $\underbrace{8\ .\ .\ .}_{A_6^3 \text{ possib}}$ ou $\underbrace{9\ .\ .\ .}_{A_6^3 \text{ possib}}$

A_6^3 ← 6 : il y avait 7 chiffres dispo au départ − le "6" du début du nombre

$\Rightarrow$ il y a $4 \cdot A_6^3$ possibilités

$= 4 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 480$ possibilités

c) ils se terminent par 3, 5, 7 ou 9

$\underbrace{.\ .\ .\ 3}_{A_6^3}$ ou $\underbrace{.\ .\ .\ 5}_{A_6^3}$ ou $\underbrace{.\ .\ .\ 7}_{A_6^3}$ ou $\underbrace{.\ .\ .\ 9}_{A_6^3}$ possib

$\Rightarrow$ $4 \cdot A_6^3$ possibilités $= 480$

combinatoire

3) l'ordre n'a pas d'importance

a) $\underbrace{C^5_{13} \cdot C^2_{39}}_{\to 7 \text{ cartes à tirer}}$

13 → 13 trèfles ; 39 → les "non trèfles"

$= 1287 \cdot 741 = 953667$

b) $\underbrace{C^3_4 \cdot C^4_{48}}_{\to 7 \text{ cartes à tirer}} \underset{\text{"ou"}}{+} C^4_4 \cdot C^3_{48}$

4 → 4 dames ; 48 → les non dames ; 4 dames

$= 4 \cdot 194580 + 1 \cdot 17296 = 795616$

4) des gens placés les uns à coté des autres → l'ordre a de l'importance

a) $P_7 = 7!$ ou $A^7_7 = 5040$

b)
FF HHHHH ⇒ $P_2 \cdot P_5$
HFFHHHH ⇒ $P_2 \, P_5$
...

$6 \cdot P_2 \, P_5 = 1440$ (ou bien $P_2 \, P_6$)

5) a) $P_8 = 8! = 40320$

b) $\underbrace{N \, , \, , \, , \, , \, ,}_{6 \text{ lettres}}$ → choix de 5 lettres sans reprendre le N ⇒ A^5_7 → 8 lettres possibles -

$= 7.6.5.4.3 = 2520$

c)
N I , , , , → 4 lettres à choisir parmi les 8 - "N et I"
N , I , , ,
N , , I , ,
N , , , I ,
N , , , , I

$5 \cdot A^4_6 = 5.6.5.4.3 = 1800$

d)
N A , , , ,
, N A , , ,
, , N A , ,
, , , N A ,
, , , , N A

$5 \cdot A^4_6$ → les 8 lettres - "N et A"

idem avec AN

$\Rightarrow 2 \cdot 5 \cdot A^4_6 = 2.5.6.5.4.3 = 3600$

combinatoire 6) 12 hô et 8 fê

a) l'ordre n'a pas d'importance $\rightarrow C^5_{20} = 15504$

b) $\underbrace{C^3_{12}}_{\text{hô}} \cdot \underbrace{C^2_{8}}_{\text{fê}} = 220 \cdot 28 = 6160$

c) $\underbrace{C^4_{12} \cdot C^1_8}_{\text{4 hô et 1 fê}}$ → 5 pers dans le comité $+ \underbrace{C^5_{12}}_{\text{5 hô et pas de fê}}$ ou

$= 495 \cdot 8 + 792 = 4752$

d) . Si Monsieur X y est et pas Mme Y $\Rightarrow \underbrace{\overbrace{C^2_{11}}^{\text{hô}}}_{\text{2 hô + Monsieur X}} \cdot \overbrace{C^2_7}^{\text{fê}}$ → on enlève Mme Y

. Si Monsieur X n'y est pas et Mme Y y est $\Rightarrow C^3_{11}$ → 12 hô − Mr X $\cdot \underbrace{C^1_7}_{\text{fê}}$

. Si aucun des 2 : $C^3_{11} \cdot C^2_7$

$\Rightarrow C^2_{11} \cdot C^2_7 + C^3_{11} \cdot C^1_7 + C^3_{11} \cdot C^2_7$

$55 \cdot 21 + 165 \cdot 7 + 165 \cdot 21 = 5775$

e) $A^3_{12} \cdot C^2_8 = 1320 \cdot 28 = 36960$

proba

exercices de probabilité

1) a) $\dfrac{C_{13}^{2} \cdot C_{13}^{4}}{C_{52}^{6}}$ coeurs ← 13, 13 → piques, → 6 cartes $= \dfrac{78 \cdot 715}{20358520} = 0,002739...$

b) $\dfrac{C_{13}^{5} \cdot C_{39}^{1} + C_{13}^{6}}{C_{52}^{6}}$ coeurs ← 13, 39 → les non coeurs, 13 → coeurs $= \dfrac{1287 \cdot 39 + 1716}{20358520}$

$= 0,0025497$

2)

$\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6)$
$(2,1), (2,2) \ldots$
$\ldots$
$\ldots \quad (6,6)\}$

$\#\Omega = 36$

A = "Somme des pts = 7" $= \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$ $\quad \#A = 6$

B = " le pt du 1er jet > le pt du 2e jet " $= \{(2,1), (3,1), (4,1), (5,1), (6,1)$
$(3,2), (4,2), (5,2), (6,2), (4,3), (5,3), (6,3), (5,4), (6,4), (6,5)\}$

$\#B = 15$

. $P(A) = \dfrac{\#A}{\#\Omega} = \dfrac{6}{36}$

. $P(A \cap B) = \dfrac{\#A\cap B}{\#\Omega}$ $\qquad A \cap B = \{(4,3), (5,2), (6,1)\} \rightarrow \#A\cap B = 3$

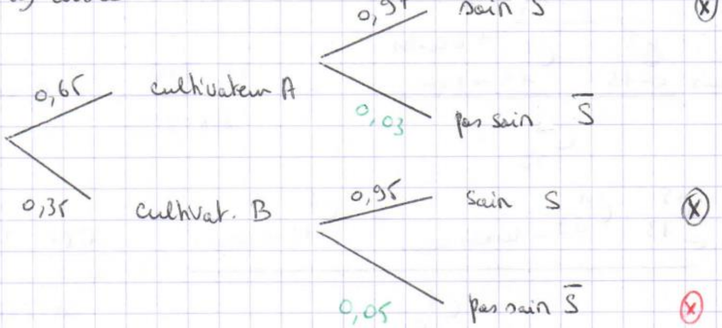
$= \dfrac{3}{36} = \dfrac{1}{12}$

. $P(A|B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} = \dfrac{\frac{3}{36}}{\frac{15}{36}} = \dfrac{3}{15} = \dfrac{1}{5}$

↓ proba conditionnelle

3) cultivateurs

a) arbre



b) $P(S)$ voir ⊗

$= P(A\,S) + P(B\,S)$

$= 0{,}65 \cdot 0{,}97 + 0{,}35 \cdot 0{,}95 = 0{,}963$

c) $P(B \mid \overline{S}) = \dfrac{P(B \cap \overline{S})}{P(\overline{S})} = \dfrac{0{,}35 \cdot 0{,}05}{(1 - p(S))}$ voir ⊗

$\underset{\downarrow}{|}$ condition

$P(\overline{S})$: être "non sain" est le contraire de S

$(1-p(S))$: voir calculs ex b

$= \dfrac{0{,}35 \cdot 0{,}05}{(1 - 0{,}963)} = 0{,}47297\ldots$

5) fumeurs

	fumeur F	$\overline{F}$	
Cancer C poumon	300	100	400
$\overline{C}$	5700	3900	9600
	6000	4000	10.000

a) $P(\overline{C}) = \dfrac{9600}{10000} = 0{,}96$

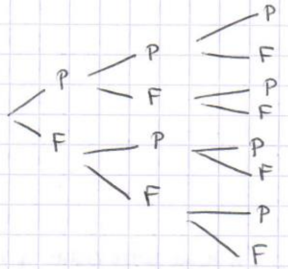
b) $P(F \cap C) = \dfrac{300}{10000} = 0{,}03$

c) $P(F \mid C) = \dfrac{300}{400} = 0{,}75$

$\underset{\downarrow}{|}$ condition

Proba

4)



$\Omega = \{PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF\}$ $\quad \# \Omega = 8$

A = "on obtient 3 fois le même coté" $= \{PPP, FFF\}$ $\Rightarrow \# A = 2$

B = " on obtient F au moins une fois" $= \{PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF\}$

$\# B = 7$

A et B sont indep $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) . P(B)$

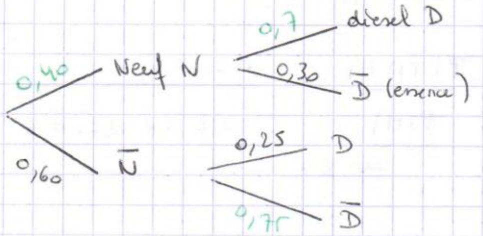
$A \cap B$ = " 3 fois le m coté et F au moins une fois" $= \{FFF\}$ $\quad \# A \cap B = 1$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{8} \overset{?}{=} \underbrace{P(A)}_{\frac{2}{8}} . \underbrace{P(B)}_{\frac{7}{8}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8} \overset{?}{=} \frac{14}{64}$$

Non, donc pas indep.

6) a)



(X)

(X)

b) $N \cap D$ = " le véhicule choisi est neuf et possède un moteur diesel"

$P(N \cap D) = 0,40 . 0,7 = 0,28$

c) $P(D) = P(N \cap D) + P(\overline{N} \cap D) = 0,40 . 0,7 + 0,6 . 0,25$

(X)

$= 0,43$

d) $P(N \mid D) = \dfrac{P(N \cap D)}{P(D)} = \dfrac{0,28}{0,43} = 0,65116\ldots$

condition

e) N et D indep ? $\underbrace{P(N \mid D)}_{0,65116} \overset{?}{=} \underbrace{P(N)}_{0,4}$ $\rightarrow$ Non, ils ne sont pas indep

7) ex de compétence (transfert)

a) • nombre de parties : $C^{2}_{14} = 91$

• nbr de parties mixtes : nbr de parties − (nbr de partie entre hô + nbr de parties entre fê)

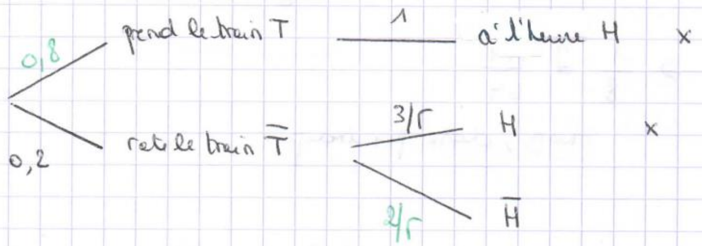
$$= C^{2}_{14} - \left(C^{2}_{8} + C^{2}_{6}\right)$$

$$= 91 - (28 + 15) = 48$$

b) $\#\Omega$ = "choix de 4 pers sur les 14" $\Rightarrow C^{4}_{14}$

$$P(\text{avoir 2 hô et 2 fê}) = \frac{C^{2}_{8} \cdot C^{2}_{6}}{C^{4}_{14}} = \frac{28 \cdot 15}{1001} = \frac{60}{143} = 0{,}4196$$

c)



$$P(\overline{T} \mid H) = \frac{P(\overline{T} \cap H)}{\underbrace{P(H)}_{\text{voir } x}} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}6}{0{,}8 \cdot 1 + 0{,}2 \cdot 0{,}6} = \frac{3}{23} = 0{,}13043$$

condition