# 6G MATH 4

# Révisions – Printemps 2020

## Question 1

(1) $f_1(x) = 10^x$ graph. h

$f_2(x) = 10^{x+3}$ graph. f

$f_3(x) = 2 + 10^x$ graph. g

$f_4(x) = 10^{x-1} - 1$ graph. i

(2) $f_1(x) = \log(x)$ graph. i

$f_2(x) = \log(x+3)$ graph. h

$f_3(x) = \log(x) + 2$ graph. f

$f_4(x) = 1 + \log(x-1)$ graph. g

(3) $f_1(x) = 10^x + 3$ graph. f

$f_2(x) = \log(x) - 2$ graph. i

$f_3(x) = \log(x+3)$ graph. h

$f_4(x) = 10^{x-4}$ graph. g

## Question 2

(1) $2^x = 256$ CE: /

$\Leftrightarrow 2^x = 2^8$

$\Leftrightarrow x = 8$

$S = \{8\}$

(2) $13^x = 1$ CE: /

$\Leftrightarrow 13^x = 13^0$

$\Leftrightarrow x = 0$

$S = \{0\}$

(3) $3^x = 243$ CE: /

$\Leftrightarrow 3^x = 3^5$

$\Leftrightarrow x = 5$

$S = \{5\}$

(4) $\sqrt{8^x} = 0,125$ CE: /

$\Leftrightarrow 8^{\frac{x}{2}} = 8^{-1}$

$\Leftrightarrow \frac{x}{2} = -1$

$\Leftrightarrow x = -2$

$S = \{-2\}$

(5) $3^{x+1} = 12 - 3^{x+2}$ CE: /

$\Leftrightarrow 3^{x+1} + 3^{x+2} = 12$

$\Leftrightarrow 3^{x}.3^{1} + 3^{x}.3^{2} = 12$

$\Leftrightarrow 3^{x}.(3^{1} + 3^{2}) = 12$

$\Leftrightarrow 3^{x}.12 = 12$

$\Leftrightarrow 3^{x} = 1$

$\Leftrightarrow 3^{x} = 3^{0}$

$\Leftrightarrow x = 0$

$S = \{0\}$

(6) $e^{3x+1} - e^{-2} = 0$ CE: /

$\Leftrightarrow e^{3x+1} = e^{-2}$

$\Leftrightarrow 3x+1 = -2$

$\Leftrightarrow 3x = -3$

$\Leftrightarrow x = -1$

$S = \{-1\}$

(7) $e^{2x} + e^{x} - 2 = 0$ CE: /

Posons $y = e^{x} > 0$

$y^2 + y - 2 = 0$

$\Delta = 1^2 - 4.1.(-2) = 9 > 0$

$\Leftrightarrow \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix} \Big\rangle \dfrac{-1 \pm 3}{2} \Big\langle \begin{matrix} 1 \\ \cancel{-2} \end{matrix}$ à rejeter car $y>0$

Donc $y = 1$

$\Leftrightarrow e^{x} = e^{0}$

$\Leftrightarrow x = 0$

$S = \{0\}$

(8) $4^{3-x} = 128$ CE: /

$\Leftrightarrow (2^2)^{3-x} = 2^7$

$\Leftrightarrow 2^{6-2x} = 2^7$

$\Leftrightarrow 6 - 2x = 7$

$\Leftrightarrow -2x = 1$

$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

$S = \{-\frac{1}{2}\}$

(9) $3^{x^2-3x+5} = 27$ CE: /

$\Leftrightarrow 3^{x^2-3x+5} = 3^3$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 5 = 3$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$

$\Delta = (-3)^2 - 4.1.2 = 1 > 0$

$\Leftrightarrow \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \Big\rangle \dfrac{3 \pm 1}{2} \Big\langle \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}$

$S = \{1; 2\}$

(10) $5^{2x} + 2.5^{x} - 3 = 0$ CE: /

Posons $y = 5^{x} > 0$

$y^2 + 2y - 3 = 0$

$\Delta = 2^2 - 4.1.(-3) = 16 > 0$

$\Leftrightarrow \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix} \Big\rangle \dfrac{-2 \pm 4}{2} \Big\langle \begin{matrix} 1 \\ \cancel{-3} \end{matrix}$ à rejeter car $y>0$

Donc $y = 1$

$\Leftrightarrow 5^{x} = 1$

$\Leftrightarrow 5^{x} = 5^{0}$

$\Leftrightarrow x = 0$

$S = \{0\}$.

(11) $4^x - 10 \cdot 2^x + 16 = 0$ CE: /

Posons $y = 2^x > 0$

$y^2 - 10y + 16 = 0$

$\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 36 > 0$

$\Leftrightarrow \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix} = \dfrac{10 \pm 6}{2} \begin{matrix} 8 \\ 2 \end{matrix}$

Soit $y = 8$

$\Leftrightarrow 2^x = 8$

$\Leftrightarrow 2^x = 2^3$

$\Leftrightarrow x = 3$

Soit $y = 2$

$\Leftrightarrow 2^x = 2$

$\Leftrightarrow 2^x = 2^1$

$\Leftrightarrow x = 1$

$S = \{1 ; 3\}$

(12) $5^{x+3} - 5^{x+1} = 3000$ CE: /

$\Leftrightarrow 5^x \cdot 5^3 - 5^x \cdot 5^1 = 3000$

$\Leftrightarrow 5^x \cdot (5^3 - 5^1) = 3000$

$\Leftrightarrow 5^x \cdot 120 = 3000$

$\Leftrightarrow 5^x = 25$

$\Leftrightarrow 5^x = 5^{2}$

$\Leftrightarrow x = 2$

$S = \{2\}$

FIN EXERCICES "EXPONENTIELLES"

## Question 3

$\Omega$ = "tous les triplets d'enveloppes possibles"


$\# \Omega = 3 . 2 . 1 = 6$ (ou $P_3 = 3! = 6$)

a) Une seul configuration existe $\Rightarrow \frac{1}{6}$

b) Trois configurations possibles $\Rightarrow \frac{3}{6}$

c) Deux configurations possibles

* destinataire A reçoit lettre B
  B C
  C A

* destinataire A reçoit lettre C
  B A
  C B

$\Rightarrow \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

### Vérification : liste des possibilités

1) $A \longleftrightarrow L_A$, $B \longleftrightarrow L_B$, $C \longleftrightarrow L_C$

2) $A \longleftrightarrow L_B$, $B \longleftrightarrow L_A$, $C \longleftrightarrow L_C$

3) $A \longleftrightarrow L_B$, $B \longleftrightarrow L_C$, $C \longleftrightarrow L_A$

4) $A \longleftrightarrow L_A$, $B \longleftrightarrow L_C$, $C \longleftrightarrow L_B$

5) $A \longleftrightarrow L_C$, $B \longleftrightarrow L_B$, $C \longleftrightarrow L_A$

6) $A \longleftrightarrow L_C$, $B \longleftrightarrow L_A$, $C \longleftrightarrow L_B$

Question 4

$E_i$ = "la lessiveuse numéro i subit une panne électronique"

$M_i$ = "la lessiveuse numéro i subit une panne mécanique"

Remarques : * Les lessiveuses ont toutes la même probabilité de subir une panne électronique

* Idem pour une panne mécanique

* Les pannes d'origine différentes sont indépendantes

(1) $P(E_i \cap M_i) = P(E_i) \cdot P(M_i)$ (csq thm mult)

$= 0{,}002 \cdot 0{,}006$

$= 0{,}000\,012$ → 0,0012 %

(2) $P(\bar{E_i} \cap \bar{M_i}) = P(\bar{E_i}) \cdot P(\bar{M_i})$ (csq thm mult)

$= (1 - P(E_i)) \cdot (1 - P(M_i))$ (csq Axiomes)

$= 0{,}998 \cdot 0{,}994$

$= 0{,}992\,012$ → 99,2012 %

(3) Une lessiveuse tombe en panne :

$P(E_i \cup M_i) = P(E_i) + P(M_i) - P(E_i \cap M_i)$ (Axiome)

$= 0{,}002 + 0{,}006 - 0{,}000\,012$

$= 0{,}007\,988$ → 0,7988 %

Deux lessiveuses tombent en panne :

$(0{,}007\,988)^2 = 0{,}000\,063\,808\,14$ → 0,006380814 %

## Question 5

(1) $\Omega$ =

| Dé 1 \ Dé 2 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | (1;1) 2 1 | (1;2) 3 2 | (1;3) 4 3 | (1;4) 5 4 |
| 2 | (2;1) 3 2 | (2;2) 4 4 | (2;3) 5 6 | (2;4) 6 8 |
| 3 | (3;1) 4 3 | (3;2) 5 6 | (3;3) 6 9 | (3;4) 7 12 |
| 4 | (4;1) 5 4 | (4;2) 6 8 | (4;3) 7 12 | (4;4) 8 16 |

$\# \Omega = 16$

somme     produit

(2) A = " obtenir une somme $\leq 4$ "

$P(A) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} = 0,375$ $\rightarrow$ 37,5 %

(3) B = " obtenir un produit $> 9$ "

$P(B) = \frac{3}{16} = 0,1875$ $\rightarrow$ 18,75 %

(4) C = " obtenir une somme $\geq$ produit "

$P(C) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} = 0,5$ $\rightarrow$ 50 %

## Question 6

V = " être vacciné "     M = " être malade "

| | M | $\overline{M}$ | |
|---|---|---|---|
| V | $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{16}$ | 11/16 | 3/4 |
| $\overline{V}$ | $\frac{5}{64}$ | 11/64 | 1/4 |
| | 9/64 | 55/64 | 1 |

- $\frac{1}{5}$ des malades ne sont pas vacciné $\Rightarrow$ $\frac{4}{5}$ des malades le sont.
- $\frac{4}{5} x = \frac{1}{16} \Leftrightarrow x = \frac{1}{16} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{64}$

(1) $P(V \mid M) = \frac{1/16}{9/64} = \frac{4}{9}$

(2) $P(M \cap V) = \frac{1}{16}$

(3) $P(M) = \frac{9}{64}$

(4) $P(M \mid \overline{V}) = \frac{5/64}{1/4} = \frac{5}{16}$

## Question 7

Ordre ? oui (ce sont des mots)
Répétitions ? oui (plusieurs "S", "G", "E")
Tous les éléments doivent être utilisés

} Permutation avec répétitions $Q_n^{p_1,p_2,p_3...} = \dfrac{n!}{p_1!\,p_2!\,p_3!...}$

$n = 12$

$p_S = p_G = p_E = 2 \qquad p_A = p_I = p_N = p_T = p_O = p_R$

$$Q_{12}^{2,2,2} = \frac{12!}{2!\,2!\,2!} = 59\,875\,200$$

Il y a 59 875 200 anagrammes de "SAINTGEORGES".

## Question 8

Ordre ? non (simultanément)

Répétitions ? non (un seul exemplaire de chaque carte)

$\Rightarrow$ Combinaison simple : $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

(1) $\Omega$ = "tous les tirages possibles"

$n = 52 \qquad p = 3$

$$C_{52}^3 = \frac{52!}{3!\,49!} = 22\,100$$

(2) $n_{\diamondsuit} = 13 \qquad p_{\diamondsuit} = 2$
$n_{\not\diamondsuit} = 39 \qquad p_{\not\diamondsuit} = 1$

$$C_{13}^2 \cdot C_{39}^1 = \frac{13!}{2!\,11!} \cdot \frac{39!}{1!\,38!} = 78 \cdot 39 = 3042$$

(3) $n_{As} = 4 \qquad p_{As} = 1$
$n_{Roi} = 4 \qquad p_{Roi} = 2$

$$C_4^1 \cdot C_4^2 = \frac{4!}{1!\,3!} \cdot \frac{4!}{2!\,2!} = 4 \cdot 6 = 24$$

(4) A = "tirer 3 cartes de la même couleur"
= "tirer 3 cartes de ♡ ou 3 cartes de ♢ ou 3 cartes de ♧ ou 3 cartes de ♤"

$n_{couleur} = 13 \qquad p_{couleur} = 3 \qquad$ nombre de couleurs $= 4$

$$4 \cdot C_{13}^3 = 4 \cdot \frac{13!}{3!\,10!} = 1144$$

$$P(A) = \frac{1144}{22\,100} = \frac{22}{425} \simeq 0{,}052$$

(5) B = "tirer au moins un cœur"

$\bar{B}$ = "ne pas tirer de cœur"

↳ $n_{\heartsuit} = 13$ $\quad p_{\heartsuit} = 0$

$n_{autre} = 39$ $\quad p_{autre} = 3$

$$\#\bar{B} = C_{13}^{0} \cdot C_{39}^{3} = 1 \cdot \frac{39!}{3!\,36!} = 9\,139$$

$$P(B) = 1 - \frac{9\,139}{22\,100} = \frac{997}{1700} \simeq 0,586$$

(6) C = "ne pas tirer de figure"

$n_{fig} = 12$ $\quad p_{fig} = 0$

$n_{autre} = 40$ $\quad p_{autre} = 3$

$$\#C = C_{40}^{3} \cdot C_{12}^{0} = \frac{40!}{3!\,37!} \cdot 1 = 9880$$

$$P(C) = \frac{9880}{22\,100} = \frac{38}{85} \simeq 0,447$$

## Question 9

Ordre ? oui (tour)

Répétitions ? non (tour)

$\Rightarrow$ Arrangement simple $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$

(1) Ω = "toutes les tours possibles"

$n = 9 + 15 + 12 = 36$ $\quad p = 5$

$$\#\Omega = A_{36}^{5} = \frac{36!}{31!} = 45\,239\,040$$

(2) B = "tour faite uniquement de bloc « baleine »"

$n = 12$ $\quad p = 5$

$$\#B = A_{12}^{5} = \frac{12!}{7!} = 95\,040$$

$$P(B) = \frac{95\,040}{45\,239\,040} = \frac{1}{476} \simeq 0,002$$

(3) C = "tour formée de 3 blocs « chiens » et de 2 « hiboux »"

$n_{ch} = 15$ $\quad p_{ch} = 3$

$n_{hi} = 9$ $\quad p_{hi} = 2$

$$\#C = A_{15}^{3} \cdot A_{9}^{2} = \frac{15!}{12!} \cdot \frac{9!}{7!} = 196\,560$$

$$P(C) = \frac{196\,560}{45\,239\,040} = \frac{13}{2992} \simeq 0,004$$

Question 10.

Ordre ? oui (nombre)
Répétitions ? oui

$\Big\}$ Arrangement avec répétitions $B_n^p = n^p$

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\emptyset$ $\cancel{7}$ | $\cancel{7}$ | $\cancel{7}$ | $\cancel{7}$ | $\cancel{7}$ | $\cancel{7}$ | $\cancel{7}$ | $\cancel{7}$ | $\cancel{7}$ | $\cancel{7}$ | $\cancel{7}$ | $\cancel{7}$ |

$n = 9 \qquad p = 11$

$B_9^{11} = 9^{11} \simeq 3{,}138 \cdot 10^{10}$ choix

8 choix

Il y a

$$8 \cdot 9^{11} \simeq 2{,}510 \cdot 10^{11}$$

nombre de 12 chiffres (donc ne commençant pas par 0) qui ne contiennent pas de 7.