Bonjour à vous toutes et tous.

J'espère que tout se passe toujours très bien pour vous et que les maths vous manquent un peu.

Je pense maintenant que l'on ne sera pas amené à se revoir cette année scolaire et je vais vous envoyer ce que nous aurions dû encore voir.

Ceci est juste pour votre information et sans aucune obligation de votre part, il n'y aura pas de contrôle évidemment.

J'ai prévu 3 parties et voici la première. Après une dizaine de jours, le correctif suivra.

Si vous éprouvez quelques difficultés vous pouvez toujours consulter les sites déjà donnés précédemment. Je vous remets leurs adresses ci-dessous.

http://mathinverses.weebly.com/

https://fr.khanacademy.org/math/grades-belges/3eme-annee-secondaire

J'aimerai aussi un petit retour de votre part. Est-ce que ça vous intéresse ou pas ? Que faites- vous pour vous occuper votre temps ?

Je vous propose de m'envoyer votre travail via mon adresse mail professionnelle : orban.marine@agrisaintgeorges.be ou mathagriorban@gmail.com

En retour, je vous transmettrai le correctif.

Bon amusement et bon travail.

M. Orban

Définitions.

✓ *Vocabulaire*

1. **Monôme** :

Un monôme est une expression algébrique du type $a \, . x^n$ (avec $a \neq 0 \, ; n \in N$)

a est appelé le coefficient ; *x* la variable et *n* exprime le degré du monôme.

Ex : $-2x^3$ est un monôme de coefficient -2, de variable x et de degré 3.

2. **Monôme semblables**:

Ce sont des monômes qui ont la même partie littérale (même variable **et** même degré)

Ex : $-2x^3$ et $8x^3$

3. **Polynômes :**

Un polynôme est une somme de monômes.

Ex : $-2a^3 + 3a^5 + a$

4. **Réduire**

(= additionner ou soustraire) les termes semblables et réécrire le polynôme ainsi réduit. Un polynôme réduit est un polynôme qui ne contient plus de monômes semblables.

Ex : $-2a^3 + 3a^5 + a$ est un polynôme réduit mais $-2a^3 + 3a^5 + 3a + 2a^5 + a$ n'est pas un polynôme réduit.

5. **Ordonner**

= Réécrire le polynôme en commençant par le monôme ayant l'exposant le plus élevé et de manière

décroissante (il est possible aussi d'ordonner de manière croissante en commençant par le

monôme ayant l'exposant le plus petit).

Ex : $-2x^3 + 3x^5 + x$ n'est pas un polynôme ordonné mais $3x^5 - 2x^3 + x$ est un polynôme ordonné.

6. **Degré**

le degré d'un polynôme correspond à l'exposant le plus élevé.

Ex : $-2x^3 + 3x^5 + x$ est un polynôme réduit – ordonné – de degré 5

7. **Complet/ incomplet**

Observer si le polynôme contient toutes les puissances à partir de la plus élevée jusqu'à l'exposant zéro (terme indépendant).

Ex : $P(x) = -3x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 8$ Ce polynôme est incomplet, il manque le terme de degré 1.

- ✓ Valeur numérique d'un polynôme.

La valeur numérique d'un polynôme est obtenue en remplaçant la variable par un réel donné.

Ex : $P(x) = 3x^5 - 2x^3 + x$

Calculons la valeur numérique de ce polynôme pour $x = 2$

On écrira : $P(\,2\,) = 3\,.\;2^5 - 2\,.\,2^3\; + 2 = 3\,.32 - 2\,.8 + 2 = 96 - 16 + 2 = 82$

Exercices

1) Ordonne les polynômes suivants de manière **décroissante**, détermine le **degré** de ceux-ci, précise s'ils sont **complets** en notant **le(s) terme(s) manquant(s)** :

a) $5x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 5x + 4x^3 + 5x^4$

b) $-9x^2 + 4x + 5x^2 - 8x + 9 – 2x – 5$

2) Calcule les valeurs numériques des polynômes suivants :

a) $P(x) = -7x^3 + 5x^2 - 5x + 3$
P(-1) =
P(0) =
b) $Q(x) = 3x^2 + 2x -1$
$Q(^1/_2)$ =
c) $P(x) = 3x^2 - 4x + 5$ pour x = 1 ➔
d) $P(t) = t^5 + 2t^3 - 3t + 4$ pour t = -2 ➔
e) $P(x) = 4x^2 - 5x + 3 – 6x^3$ pour x = $\frac{1}{4}$ ➔
f) $P(a) = -2a^3+ 7a^2- 2a -2$ pour a = $\frac{-1}{3}$ ➔

Opérations

✓ *Addition et soustraction*.

Soient les polynômes $A(x) = 1 - 4x + 6x^2 - 8x^3$, $B(x) = 4x - 2x^2$ alors $A(x) + B(x)$

- Ecris les polynômes l'un à la suite des autres entre **( )**.

  $A(x) + B(x) = (1 - 4x + 6x^2 - 8x^3) + (4x - 2x^2)$

- Supprime les **( ).**

  $A(x) + B(x) = 1 - 4x + 6x^2 - 8x^3 + 4x - 2x^2$

- Réduis et ordonne ton résultat.

  $A(x) + B(x) = -8x^3 + 4x^2 + 1$

Attention au changement de signe pour la soustraction, au signe – devant des ( )

✓ *Multiplication.*

Soient les polynômes $Q(x) = x + 4$, $R(x) = 3x^2 + 2x - 1$ alors calcule $Q(x).R(x)$

Ecris les polynômes l'un à la suite de l'autre en utilisant des ( ).

$Q(x).R(x) = (x + 4).(3x^2 + 2x - 1)$

Distribue puis réduis le résultat.

$Q(x).R(x) = 3x^3 + 14x^2 + 7x - 4$

Exercices

Calcule

1) Si P(x) = $5x^3 - 2x^2 + 5x - 3$ et R(x) = $3x^2 + 4x + 5 - x^3$

a) *P(x)* + *R(x)* =

b) *P(x)* – *R(x)* =

c)Vérifie *P(x)* + *R(x) si x = 2*

2) Soient $P(x) = -4x^2 - 5x + 1$ et $S(x) = -x - 2$

Calcule $P(x) \cdot S(x) =$

Vérifie *si* $x = -1$

3) Soient $P(x) = x^2 + 2x - 3$ et $R(x) = x - 3x^2 - 2$

Calcule : $2.P(x) - 3.R(x) =$

✓ *Division euclidienne*

La méthode pratique de division d’un polynôme par un polynôme est basée sur celle de la division écrite d’un nombre par un nombre.

$(3x^2+3x^4+8+7x):(3x+6)$

$3x^4$	$+0x^3$	$-x^2$	$+7x$	$+8$	$3x+6$
$-3x^4$	$-\cancel{+}6x^3$				$x^3-2x^2+\frac{11x}{3}-3$
	$-6x^3$	$-x^2$	$+7x$	$+8$	
	$+6x^3$	$+12x^2$			
		$11x^2$	$+7x$	$+8$	
		$-11x^2$	$-\cancel{+}22x$		
			$-9x$	$+8$	
			$-9x$	$+18$	
				26	

- On utilise la disposition pratique.
- On ordonne et on complète le dividende.
- On divise le 1er terme du dividende par le 1er terme du diviseur :
  $\frac{{}^{1}\cancel{3}x^{\cancel{4}3}}{\cancel{3}_1 \cancel{x}_1} = x^3 \Rightarrow$ 1er terme du quotient
- On multiplie le diviseur par le 1er terme du quotient.
  $x^3.(3x+6) = 3x^4+6x^3$
- On soustrait ce résultat du dividende et on obtient le 1er reste partiel.

- On fait de même avec le reste partiel comme nouveau dividende $\frac{-6x^3}{3x} = -2x^2$
- $-2x^2.(3x+6) = -6x^3 - 12x^2$
- $\frac{11x^2}{3x} = \frac{11x}{3}$
- $\frac{11x}{3}.(3x+6) = \frac{33x^2}{3} + \frac{66x}{3}$
  $= 11x^2 + 22x$
- $-3.(3x+6) = -9x - 18$
- Le degré du reste est évidemment inférieur à celui du diviseur.
- 26 est le reste.

✓ *Division par (x – a) - Méthode d'Horner*

Lorsque le diviseur est un binôme de la forme $(x-a)$, on peut utiliser une autre disposition pratique
appelée **méthode d'Horner**.

Effectue la division de $\left(x^3-5x^2+11x-6\right)$ par $(x-2)$

Dividende : $D(x)=1x^3-5x^2+11x-6$

Diviseur : $d(x)=x-2$

Il faut <u>ordonner</u> le dividende (suivant les puissances décroissantes de la variable) **et** le <u>compléter</u> si nécessaire.

coefficients de $D(x)$	1	-5	11	-6
		+	+	+
a = 2		2	-6	10
	.2	.2	.2	
coefficients de $q(x)$	1	-3	5	4 = r

Quotient : $q(x)=1x^2-3x+5$ le quotient est de degré 2 car $\dfrac{x^3}{x}=x^{3-1}=x^2$

Reste : $r=4$

On peut exprimer le dividende sous la forme $D(x)=d(x).q(x)+r$

Donc $(x^3 - 5x^2 + 11x – 6) = (x – 2) . (x^2 - 3x + 5) + 4$

<u>Exercices</u>

<u>Calcule</u> en utilisant la **<u>méthode de Horner</u>**.

<u>Ecris le dividende</u> sous la forme d'une égalité. Ou D(x) = d(x) . Q(x) + R(x).

a) $(4x^3 - 3x^2 - x + 1) : (x – 2)$

b) $(x^4 – 3x^2 + 1) : (x + 1)$

✓ *Loi du reste*

Le reste de la division d'un polynôme en x par un binôme de la forme *x - a* est la valeur numérique de ce polynôme pour *x = a*

Ex :

a) Sans effectuer la division, calcule le reste de la division de $P(x) = x^3 - 2x^2 - 9$ par $(x-3)$.

$$\begin{aligned} r = P(3) &= 3^3 - 2.3^2 - 9 \\ &= 27 - 2.9 - 9 \\ &= 27 - 18 - 9 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Remarque

$r = 0$ donc la division est exacte.

On dit que $P(x)$ est divisible par $(x-3)$.

Comme $D = d.q + r$ et que $r = 0$ alors

$x^3 - 2x^2 - 9 = (x^2 + x + 3)(x - 3)$

b) Sans effectuer la division, calcule le reste de la division de $P(x) = x^4 - 3x^3 + 4$ par $(x + 2)$

$$\begin{aligned} r = P(-2) &= (-2)^4 - 3.(-2)^3 + 4 \\ &= 16 - 3.(-8) + 4 \\ &= 16 + 24 + 4 \\ &= 44 \end{aligned}$$

Remarque

$r \neq 0$ donc la division n'est pas exacte. $P(x)$ n'est pas divisible par $(x + 2)$. Comme $D = d.q + r$ et que $r \neq 0$ alors

$x^4 - 3x^3 + 4 = (x^3 - 5x^2 + 10x - 20)(x + 2) + 44$

Exercices

1) Calcule le reste des divisions suivantes sans effectuer la division :

a) $(2x^3 - 9x^2 + 7x + 6) : (x - 2)$

b) $(x^3 + 7x + 12) : (x + 4)$

2) Parmi les divisions suivantes, détermine celles qui se font exactement.

Justifie tes réponses par un calcul **SANS** utiliser Horner.

a) $(x^6 + 3x^3 - 2) : (x + 1)$

b) b) $(2x^3 + 6x^2 + x + 3) : (x + 3$

✓ *La factorisation*

***Factoriser un polynôme, c'est le transformer en un produit de facteurs*.**

Rappel des différentes méthodes de factorisation.

1. La mise en évidence : lorsque les termes d'une somme algébrique ont un(ou plusieurs) facteur(s) commun(s), on peut les mettre en évidence.

- $18x^2y^3 - 12x^4$ 6 est le PGCD de 12 et 18, on met **6** en évidence
  x est le facteur littéral commun, on l'affecte de son exposant le plus petit on met **x²** en évidence

  $= 6x^2.(3y^3 - 2x^2)$

2. Utilisation des produits remarquables

   a. Différence de deux carrés **(a + b) . (a – b) = a² - b²**

- $25b^2 - 4$ $25b^2$ est le carré de $5b$ **et** 4 est le carré de 2

  $= (5b-2)(5b+2)$

- $16 + b^2$ une somme de deux carrés n'est pas factorisable !

   b. Trinôme carré parfait

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

- $4a^2 + 20a + 25$ Y a-t-il bien deux carrés parfaits ? oui, $4a^2 = (2a)^2$ et $25 = (5)^2$
  Le troisième terme est-il le double produit de $2a$ et de 5 ? oui,
  $2.2a.5 = 20a$
  Le double produit est positif, il s'agit du carré d'une somme.

$= (2a+5)^2$

- $9 + 6x + 4x^2$ Y a-t-il bien deux carrés parfaits ? oui, $9 = 3^2$ et $4x^2 = (2x)^2$
  Le troisième terme est-il le double produit de 3 et $2x$? non,
  $2.3.2x = 12x \neq 6x$
  $9 + 6x + 4x^2$ n'est pas un trinôme carré parfait

c. Quadrinôme : groupements

- $4a^2 - 12a + 9 - b^2$ Trois des quatre termes forment un trinôme carré parfait donc on les groupe

$= \left(4a^2 - 12a + 9\right) - b^2$ On factorise ce trinôme en $(2a-3)^2$

$= (2a-3)^2 - b^2$ On obtient une différence de deux carrés que l'on va pouvoir factoriser

$= \left[(2a-3) - b\right].\left[(2a-3) + b\right]$

$= (2a - 3 - b).(2a - 3 + b)$

- $12\boldsymbol{xy} + 2 + 8\boldsymbol{x} + 3\boldsymbol{y}$ Il n'y a pas de trinôme carré parfait ni de facteur commun à <u>tous les termes</u> mais il est possible d'en faire apparaître en les groupant 2 par 2.

En effet, en groupant 12xy et 3y on peut mettre 3y en évidence et en groupant 2 et 8x on peut mettre 2 en évidence.

$= (12\boldsymbol{xy} + 3\boldsymbol{y}) + (2 + 8\boldsymbol{x})$

$= 3\boldsymbol{y}.(4\boldsymbol{x} + 1) + 2.(1 + 4\boldsymbol{x})$

$= 3\boldsymbol{y}.(4\boldsymbol{x} + 1) + 2.(1 + 4\boldsymbol{x})$ Ce groupement fait apparaître un facteur commun aux deux termes (4x+1), que l'on met en évidence.

$= (4\boldsymbol{x} + 1).(3\boldsymbol{y} + 2)$

d. Division par (x-a) : méthode des diviseurs binômes

- $\boldsymbol{x}^2 - 5\boldsymbol{x} + 6$ Pour déterminer la valeur de a, on cherche les diviseurs entiers de 6 : 1, 2, 3, 6, -1, -2, -3, -6

$P(1) = 1^2 - 5.1 + 6 = 2 \neq 0$ On calcule les valeurs numériques de ce polynôme pour chacun

$P(-1) = (-1)^2 - 5.(-1) + 6 = 12 \neq 0$ de ces nombres jusqu'à obtenir un résultat nul.

$P(2) = 2^2 - 5.2 + 6 = 0$ P(2) = 0 donc, par la loi du reste, on en déduit que le polynôme est divisible par (x-2).

On effectue la division de $\boldsymbol{x}^2 - 5\boldsymbol{x} + 6$ par $\boldsymbol{x} - 2$.

	1	-5	6
2		2	-6
	$\boxed{1}$	-3	0

$Q(x) = 1x - 3$

On peut écrire le polynôme sous la forme $D(x) = d(x).Q(x)$

donc $x^2 - 5x + 6 = (x-3).(x-2)$

Synthèse

Polynôme à factoriser

↓

Mise en évidence

↓

Binôme	***Trinôme***	***Quadrinôme***
• **Différence de deux carrés :** $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ • **Division par** $(x-a)$	• **Trinôme carré parfait :** $a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$ • **Division par** $(x-a)$	• **Groupement 2 - 2** **(et mise en évidence)** • **Groupement 3 – 1** **(et identités remarquables)** • **Division par** $(x-a)$

Exercices résolus

Factorise

1) $3a^5-3a=3a.\left(a^4-1\right)$ Mise en évidence

différence de deux carrés

$=3a.\left(a^2+1\right).\left(a^2-1\right)$

différence de deux carrés

$=3a.\left(a^2+1\right).\left(a-1\right).\left(a+1\right)$

2) $2x^2+12x+10=2.\left(x^2+6x+5\right)$ Mise en évidence

→ Méthode des diviseurs binômes

$P(-1)=(-1)^2+6.(-1)+5$

$=1-6+5$ division exacte par (x+1)

$=0$

	1	6	5
-1		-1	-5
	1	5	0

Q(x) = x+5

$2.\left(x^2+6x+5\right)=2.\left(x+1\right).\left(x+5\right)$

Exercices

1) Factorise :

a) $9 - b^2 =$

b) $49x^2 + 70x + 25 =$

c) $25x^2 - 16 =$

d) $x^8 - y^8 =$

e) $20x^2 - 5 =$

f) $36x^2 - 12x + 1 =$

g) $(2 + a)^2 - 9 =$

h) $-18a^4b^2 + 8a^4 =$

i) $-9a^4 - 12a^2 - 4 =$

2) Factorise en utilisant la méthode de Horner. Écris tous tes calculs

a) $x^2 + 11x + 10 =$

b) $x^2 - 9x + 18 =$
c) $x^2 + x – 12 =$

✓ ***Equations produit de facteurs nuls***

Un produit de facteurs est nul si et seulement si un de ses facteurs est nul.

$$a.b=0 \Leftrightarrow a=0 \text{ ou } b=0$$

Attention : assure-toi que l'expression proposée soit une équation produit.
Si ce n'est pas le cas, tu dois factoriser l'expression.

Pour résoudre une équation produit :

1) Isoler tous les termes dans le 1er membre.
2) Factoriser l'expression obtenue afin de n'avoir que des facteurs en x du 1ier degré.
3) Résoudre cette équation par application du produit nul.

REMARQUE :

Lorsque l'équation est du 1er degré, la solution sera unique

Lorsque l'équation est du 2ème degré, on retrouve 2 solutions

Lorsque l'équation est du 3ème degré, on retrouve 3 solutions

Exemples :

1) $x^3 = 16x$ → équation du 3ième degré

$x^3 - 16x = 0$

$x.(x^2 - 16) = 0$

$x.(x - 4).(x + 4) = 0$

$\boxed{x = 0}$ OU $\boxed{x = 4}$ OU $\boxed{x = -4}$ → Sol = {-4 ; 0 ; 4}

2) $2x.(4x+5)=0$

Le deuxième membre de l'équation est nul.
Le premier membre de l'équation est un produit.
Je ne sais plus factoriser.

$\Updownarrow$

$2x=0$ ou $4x+5=0$

J'égalise chaque facteur à 0

$\Updownarrow$

$x=0$ ou $4x=-5$

je résous les équations.

$\Updownarrow$

$x=0$ ou $x=\frac{-5}{4}$

$$S=\left\{\frac{-5}{4};0\right\}$$

3) $(x-4).(x+7)=0$

$\Updownarrow$

$x-4=0$ ou $x+7=0$

$\Updownarrow$

$x=4$ ou $x=-7$

$\Updownarrow$

$$S=\{-4\ ;\ -7\}$$

4) $3x^3-27x=0$

$\Updownarrow$

$3x.(x^2-9)=0$

$\Updownarrow$

$3x.(x-3).(x+3)=0$

$\Updownarrow$

$3x=0$ ou $x-3=0$ ou $x+3=0$

$\Updownarrow$

$x=0$ ou $x=3$ ou $x=-3$

$\Updownarrow$

$$S=\{-3\ ;\ 0\ ;\ 3\}$$

Exercices

Résous les équations suivantes en passant par une équation produit.

1) $x^2 - 16 = 0$

2) $25x^2 - 4 = 0$

3) $x^2 - 10x + 25 = 0$

4) $5x - x^2 = 0$

5) $x^3 - 3x^2 = 0$

6) $2x^2 = x^2 + 36$

7) $x^2 - 100 = 0$

8) $x^2 = -4$

9) $x^2 = 64$

10) $x^2 + 8x + 9 = 0$

Bon travail